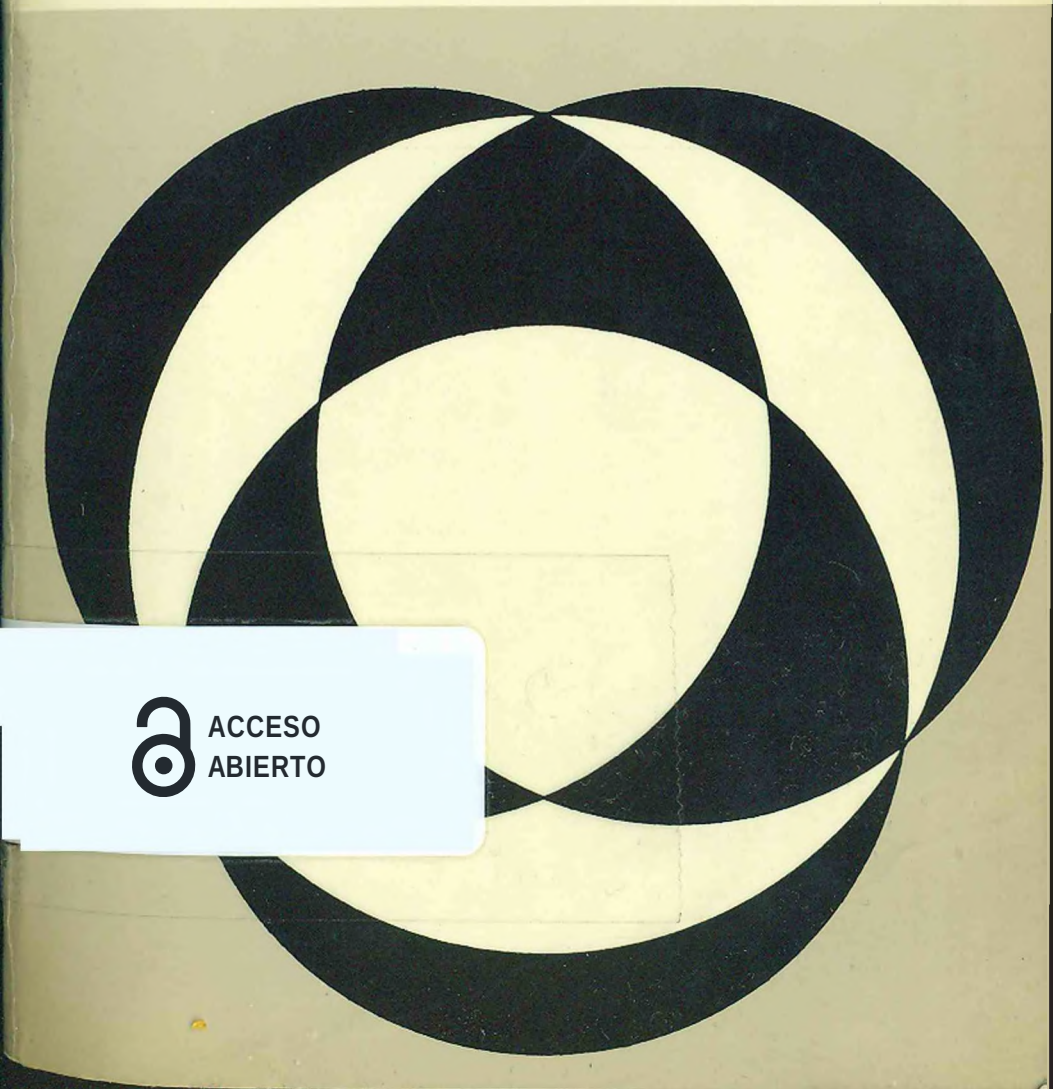
LUDWIG WITTGENSTEIN Y EL CIRCULO DE VIENA

cfe

Friedrich Waismann



ACCESO ABIERTO

WITTGENSTEIN Y EL CÍRCULO DE VIENA

FRIEDRICH WAISMANN

WITTGENSTEIN
Y EL
CÍRCULO DE VIENA

Edición preparada por
B. F. McGUINNESS

FONDO DE CULTURA ECONÓMICA
MÉXICO

Primera edición en alemán, 1967
Primera edición en español, 1973

Traducción de
MANUEL ARBOLÍ

Título original:
Wittgenstein und der Wiener Kreis
© 1967 Basil Blackwell, Oxford
Printed in Germany

D. R. © 1973 FONDO DE CULTURA ECONÓMICA
Av. de la Universidad 975, México 12, D. F.

Impreso en México

WITTGENSTEIN: LISTA DE OBRAS CITADAS

Abreviatura		*Fecha aproximada de aparición*
NL	*Notes on Logic (Cuadernos 1914-16,* Oxford, 1961, págs. 93-106).	1913
Nb	*Notebooks (Cuadernos,* págs. 2-91).	1914-17
TLP	*Logisch-Philosophische Abhandlung,* luego *Tractatus Logico-Philosophicus.* Diversas ediciones. En español, edición bilingüe en Revista de Occidente, Madrid, 1957.	1918-19
LE	"Lecture on Ethics" *(Philosophical Review,* lxxiv, 1965, págs. 3-12).	1929
MsBd	*Manuskriptbände* I-X (inéditos) *(Manuscritos,* I-X).	1929-32
PhB	*Philosophische Bermerkungen* (Frankfurt, a. M., 1964) *(Observaciones filosóficas)* [[contienen material de los *Manuscritos* del I al III y parte del IV]].	1930
EM	*Extrakt aus den Manuskriptbänden* (inédito) *(Extracto de los Manuscritos)* [[Escrito a máquina de 770 páginas; contiene material de los *Manuscritos,* tomos del V al IX]].	1931-32
PhGr	*Philosophische Grammatik* (inédita) *(Gramática filosófica)* [[Escrito a máquina de 768 páginas; contiene material de los *EM* y otros extractos similares, divididos en secciones y capítulos]].	1932
GdM	*Grundlagen der Mathematik* (inéditos) *(Fundamentos de la matemática)* [[las 240 últimas páginas de la *Gramática filosófica*]].	1932
BGM	*Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* (Oxford, 1956) *(Observaciones sobre los fundamentos de la matemática).*	1937-42
PhU	*Philosophische Untersuchungen* (Oxford, 1953) *(Investigaciones filosóficas).*	1945-49

PREFACIO DE LA EDICIÓN ALEMANA

I

EL MATERIAL que se edita en este libro procede de las obras póstumas de Friedrich Waismann, salvo un par de páginas que faltan en el propio ejemplar de sus "Tesis" (aquí en el *Apéndice B)* y que fueron puestas a mi disposición por el Dr. Josef Schächter, de Jerusalén. Lo mismo cabe decir de algunas partes de los apuntes sobre filosofía de las matemáticas, del *Apéndice A,* que solamente se hallan en los extractos seleccionados por el señor Shimshon Stein, de Tel-Aviv.

Nada de este material puede pasar sin más como obra exclusiva de Waismann, pues todo él procede de una época en que Wittgenstein estuvo dispuesto, aunque con mucha reserva y reflexión, a permitir que sus ideas se difundieran por Viena mediante informes compilados por Waismann. Sin embargo, paulatinamente fue quedando insatisfecho con ese sistema, como veremos, y prefirió labor más de consuno con Waismann. Cuando tampoco le agradó este procedimiento, parece que comunicó sus ideas a los amigos que tenía en Viena por intermedio de conversaciones con Schlick a solas y también suministrando ejemplares del *Blue Book* y otros apuntes dictados.

Por su parte, Waismann pudo elaborar muchas ideas de Wittgenstein sobre filosofía de las matemáticas en su *Einführung in das mathematische Denken (Introducción al pensamiento matemático),*[1] aparecida por primera vez en 1938, y que en lo esencial es obra propia suya. Por otra parte, jamás salió a la luz su libro *Logik, Sprache, Philosophie (Lógica, lenguaje, filosofía),* que se anunció repetidamente desde 1929 a 1931, a pesar o quizás debido a sus frecuentes reelaboraciones. Por fin, en 1965, seis años después de la muerte de Waismann, vio la luz en inglés, en forma asaz cambiada y con el título de *Principles of Linguistic Philosophy.*[2]

[1] Sobre la aportación de Wittgenstein a esa obra, ver pág. 168 de la segunda edición (Viena, 1947).

[2] Se espera poder editar pronto la última versión alemana, que data de 1938-39 y que no difiere gran cosa de la inglesa.

II

El contenido más temprano de la parte principal de este libro consta de una conversación habida en diciembre de 1929. Dicho año lo pasó Wittgenstein en Cambridge, y su regreso a la filosofía como ocupación principal puede retrotraerse a esa época; aunque, como es de esperar, tuvo más ocasiones en los veinte años anteriores de interesarse por la filosofía, fuera a instancias de otros o por propia iniciativa. F. P. Ramsey lo visitó varias veces en 1923 y también en 1924, con un intervalo de seis o siete meses. Ambos discutieron el *Tractatus* y Wittgenstein propuso algunos cambios para la traducción inglesa,[3] que en realidad aparecieron en la segunda edición; asimismo, discutieron sobre los fundamentos de la matemática y las modificaciones que era preciso introducir en *Principia Mathematica*.

Pero el 24 de marzo de 1924, Ramsey escribía a Keynes que Wittgenstein encontraba agotador pensar y que requería de alguien como él que lo estimulara. El propio Wittgenstein escribía a Keynes (4 de julio de 1924):

> Me pregunta si usted puede hacer algo para entusiasmarme de nuevo por el trabajo científico. No, a ese respecto ya no se puede hacer nada, pues no poseo estímulos interiores suficientemente fuertes para tal ocupación. Todo cuanto tenía que decir lo he dicho ya y con ello la fuente se ha secado. Suena raro, pero así es.

De ese modo quedó la cosa por el momento. Se suspendió un plan que pretendía mover a Wittgenstein a permanecer en Cambridge el tiempo suficiente para que se le otorgara un doctorado, y la visita que efectuó en 1925 la dedicó exclusivamente a sus amigos.

En el ínterin, en Viena su *Tractatus* se convertía en objeto de vivo interés. En 1922, el matemático Hans Hahn tuvo un seminario sobre él, e igualmente quedaron profundamente impresionados los profesores Moritz Schlick (de filosofía) y Kurt Reidemeister (de matemáticas), ambos llamados en 1922 a Viena. Schlick escribía a Wittgenstein el 25 de diciembre de 1924 en los siguientes términos:

[3] Para más particularidades, véase una referencia de C. Lewy, que apareció en *Mind* en forma sucinta.

> Como admirador de su *Tractatus Logico-Philosophicus,* hace tiempo me propuse mantenerme en comunicación con usted. Mi cargo, lo mismo que otras obligaciones, han sido la causa de que haya postergado la realización de mi propósito una y otra vez, por más que desde mi llamada a Viena hayan pasado ya seis semestres. Durante el semestre de invierno celebro encuentros con otros colegas y con algunos alumnos dotados, para tratar de lógica y de matemáticas. En esas reuniones su nombre se ha citado a menudo, especialmente desde que mi colega el mátemático, profesor Reidemeister, sostuvo una conferencia sobre su obra, que produjo gran impresión en todos nosotros. Existe también aquí cierto número de personas —entre las que me cuento yo— que están convencidas de la importancia y tino de sus pensamientos básicos, por lo que tenemos vivo deseo de ponernos a trabajar en la expansión de sus puntos de vista...

(Continúa Schlick preguntando a Wittgenstein cómo podría conseguir ejemplares de su *TLP*)... "Sería para mí motivo de especial contento poderlo conocer personalmente, y me permitiría visitarlo ocasionalmente en Puchberg,[4] a menos que usted me hiciera saber que no desea ser molestado durante su asueto campestre."

Wittgenstein encontró esta carta en Otterthal, a su regreso de las vacaciones navideñas, y contestó con amabilidad (7 de enero de 1925) que no poseía ejemplar alguno del *TLP*, y se mostró muy satisfecho de que Schlick se hubiera propuesto visitarlo. Éste, en su contestación (14 de enero), de nuevo volvía a expresar su intención de ir a verlo. En realidad, parece que Schlick no emprendió la visita antes de finales de abril de 1926, porque cuando él —junto con algunos de sus mejores alumnos— se presentó en Otterthal, halló que Wittgenstein había renunciado a su cátedra y abandonado el lugar. A pesar de las simpatías por Schlick, quien le había dicho que se alegraría mucho de poderlo visitar aunque debiera emprender una vez más el viaje a Viena, Wittgenstein se mostró muy reservado, según parece, en cuanto a visitarlo. Desde el otoño de 1926, Wittgenstein estaba muy ocupado con la construcción de la casa de su hermana, Frau Margaret Stonborough, en la calle Kundmann.

Frau Stonborough era bien conocida en los círculos sociales e intelectuales vieneses y fue ella quien por fin consiguió el encuentro entre Schlick y Wittgenstein. Schlick envió a Witt-

[4] Wittgenstein se trasladó de manera inesperada a Otterthal, durante el otoño. Schlick quizás habría recibido de Ramsey la dirección de Puchberg, durante el verano.

genstein uno de sus escritos y le propuso una entrevista con una o dos personas más para tratar problemas de lógica.

Frau Stonborough escribía el 19 de febrero de 1927:

> Me ruega que le salude y que le excuse porque no cree hallarse todavía en condiciones de concentrarse en problemas de lógica, pues el trabajo que tiene le toma todo el tiempo. Por ningún motivo quisiera él conferenciar con más personas y sólo consiente tratar esos temas exclusivamente con usted, profesor. En esa ocasión se verá —según piensa— si por el momento está en posibilidades de serle de provecho a usted.

Schlick fue invitado a almorzar, para tratar de filosofía en la sobremesa.

> La invitación de Frau Stonborough —así lo recordaba Frau Schlick— nos produjo alegría y expectación. Pero esta vez no se vieron frustradas las esperanzas de M. De nuevo pude observar, como en la ocasión de la fallida visita en Otterthal, la actitud reverente del peregrino. Entonces regresó en estado de desánimo, hablaba poco y yo notaba que no debía hacerle preguntas.[5]

En la reacción inmediata del propio Wittgenstein a la visita se percibe cierta ironía socrática. "Nos hemos tomado recíprocamente por locos", decía él al día siguiente a su amigo y entonces socio arquitecto, Paul Engelmann.[6] Pero según comunica el propio Engelmann, ambos llegaron pronto a una buena inteligencia:

"Wittgenstein encontró en Schlick a un contrincante de categoría y muy capaz, y quedó impresionado de su personalidad altamente cultivada."

Según parece, Wittgenstein sólo accedió a tener otros copartícipes del círculo de Schlick, después de muchas conversaciones

[5] Mi relación de los intentos de Schlick de encontrarse con Wittgenstein y su realización final se basa en la correspondencia contemporánea arriba citada y en los recuerdos de la malograda señora Blanche Schlick, que fueron comunicados al profesor Von Hayek y, en menor medida, también a mí (con la ayuda gentil del profesor Kraft). El trozo anterior procede de una carta que ella permitió se citara. No puedo agradecer suficientemente la ayuda prestada por el profesor Von Hayek para que pudiera disponer de éste y demás material. El conocimiento de la carta de Frau Stonborough (y de otras aquí citadas) lo debo al Dr. H. Mulder, de Amsterdam, quien también me secundó con magnanimidad.

[6] Véase *Letters from L. W. etc.*, de Engelmann, Oxford, 1967, Cap. V. Engelmann dice que los dos se vieron a las diez y que Karl Buhler y señora asistieron también como invitados.

con él. Waismann, que era el más allegado a Schlick, casi siempre se hallaba presente. También acudieron muchas veces el profesor Carnap, como tercero,[7] el profesor H. Feigl y la señorita Maria Kasper (ahora Frau Feigl). Wittgenstein, muy ocupado con otras cosas y especialmente con la construcción, no se hallaba siempre dispuesto a tratar cuestiones filosóficas. Muchas veces prefería leer poesías (especialmente de Rabindranath Tagore), de ordinario dando la espalda a los oyentes. Sin embargo, había muchas ocasiones en que hacía indicaciones o explicaciones incidentales a sus puntos de vista, que los presentes encontraban esclarecedoras y sugestivas. No parece que haya quedado constancia de tales conversaciones, habidas durante los años de 1927 y 28. Algunas, si no todas las discusiones, versaron sobre la filosofía de las matemáticas y sobre la conferencia de Ramsey "The Foundations of Mathematics".

Schlick y Waismann parece que en el verano de 1927 fueron intermediarios de la correspondencia entre Wittgenstein y Ramsey sobre la identidad, cuyas partes filosóficas se presentan en este libro (págs. 166 *ss.*).

En su carta a Wittgenstein (15 de agosto de 1927), que contenía la respuesta de Ramsey, Schlick dice que regresaría a Viena en noviembre y expresa su esperanza de que "usted esté dispuesto también a continuar las pequeñas entrevistas que empezamos las tardes de los lunes. Ya habría notado qué sincera alegría nos brindaba discutir con usted".

Y en octubre decía:

"Prometo que no hablaremos de ciencia entonces."

Estos encuentros no constituían en modo alguno lo que luego fue conocido como Círculo de Viena, pues las reuniones de éste tenían lugar las tardes de los jueves. Schlick invitó a Wittgenstein a una de ellas en junio de 1928, pero no se sabe si asistió nunca a ninguna. Parece que en esos años (1927-28) las observaciones de Wittgenstein en el curso de la conversación no constituyeron objeto de discusión en las reuniones de las tardes del jueves.

El único acontecimiento formal y filosófico en que parece tomó parte Wittgenstein fue una conferencia dada por Brouwer en marzo de 1928.[8] Waismann y Feigl tuvieron dificultades al

[7] El profesor Carnap trae un interesante informe sobre estas conversaciones en su "Autobiography" en *The Philosophy of Rudolf Carnap*, editada por P. A. Schilpp (La Salle, Ill., 1963), págs. 24-30.

[8] Véase G. Pitcher: *The Philosophy of Wittgenstein* (Englewood Cliff, N. J., 1964), pág. 8.

principio para convencer a Wittgenstein para que asistiera, pero luego le gustó extraordinariamente haberlo hecho.

III

El año de 1929 trajo grandes cambios en la vida de Wittgenstein y en el Círculo de Viena. Durante el otoño, la casa de la calle Kundmann quedó lista, y luego de alguna demora Wittgenstein se dirigió a Cambridge, adonde llegó en enero de 1929 con el fin de descansar (según había dicho a Keynes). Pero pronto decidió quedarse allí —aunque quizá ya estaría medio decidido desde tiempo atrás— para trabajar en su filosofía.

"He decidido quedarme por un par de términos * aquí en Cambridge para trabajar sobre el espacio visual y en otras cosas... Salude de mi parte a la tertulia y al señor Waismann en particular. Espero poderlos volver a ver en un mes." (Carta a Schlick, del 18 de febrero de 1929.)

No existe referencia alguna sobre las conversaciones tenidas durante las vacaciones pascuales, aunque fue año de actividad intensa y satisfactoria. De los temas que elaboró Schlick, pasó Wittgenstein a los problemas relacionados con la aritmética. Escribió el artículo "Some Remarks on Logical Form", editado en *Proceedings of the Aristotelian Society, Supplementary Volume IX* (1929), pero en la reunión en que debía tratarse de ese artículo sostuvo una conferencia sobre el concepto de infinito en matemáticas. Por este tiempo más o menos escribía a Waismann (junio-julio, 1929):

"Últimamente he trabajado mucho y con éxito, y me hubiera gustado aclararle algo". Waismann, que hacía poco se había casado, no pudo verlo aquel verano, como tampoco Schlick, que se hallaba en América y cuya ausencia fue en parte causa de aquella carta. Ya antes en ese mismo año, Schlick había declinado una invitación a Bonn, para poder quedarse con su tertulia de Viena. Decidieron, en agradecimiento a aquella deferencia, entregarle un escrito que contuviera un informe sobre las opiniones esencialmente comunes, las publicaciones y los precursores de la escuela que le circundaba. Así se formó el escrito del Círculo de Viena *Wissenschaftliche Weltauffassung*

* *Term*, en las universidades inglesas cada uno de los trimestres académicos. [T.]

(Viena, 1929) *(Concepción científica del mundo),* que se puso en venta el mes de septiembre de ese año en Praga, durante la Convención sobre el Conocimiento de las Ciencias Exactas; a Schlick se le remitió un ejemplar encuadernado en cuero. Este fue el bautizo del Círculo de Viena. Ya al año siguiente se presentó como movimiento filosófico con la adquisición de la publicación *Annalen der Philosophie (Anales de Filosofía),* conocida ordinariamente como *Erkenntnis (Conocimiento).*

Este proceso no fue del gusto de Wittgenstein. Mientras se proyectaba el libro, escribía a Waismann:

> Precisamente porque Schlick no es un cualquiera merece que se evite, aunque se lleve la mejor intención, convertir en objeto de irrisión por medio de jactancias tanto a él como al Círculo de Viena, cuyo máximo exponente es. Cuando hablo de jactancias, me refiero a cierto modo de contemplación narcisista. ¡Renunciamiento a la metafísica!, como si esto fuera algo nuevo. Lo que brinda la Escuela de Viena debe *mostrarlo,* no *decirlo*... *La obra* es la que debe elogiar al maestro.

Después de muchos años, parece que la publicación no acabó de calmar los graves temores de Wittgenstein, aunque no sabemos cómo reaccionó apenas salió. Amén de una exposición de los fundamentos de la Escuela, contenía una provechosa bibliografía, un estudio de Waismann sobre el contenido del *TLP* y el anuncio de la pronta aparición del trabajo *Logik, Sprache, Philosophie,* del mismo Waismann, que debería ser una propedéutica a los pensamientos del *TLP.* Parte de la "primera concepción" del trabajo se halla en los escritos póstumos de Waismann. Por este tiempo, el escrito no se ocupaba del *TLP,* y los nuevos pensamientos explicitados en el artículo "Logical Form", al igual que las conversaciones primeras publicadas en el presente libro, no encontraron por lo mismo ningún eco.

Quizás fuera la aparición del Círculo de Viena como escuela filosófica lo que ocasionó el rechazo de Wittgenstein. En todo caso, de allí en adelante su contacto se limitó a las entrevistas con Schlick y Waismann. La tertulia no lo volvió a ver más.

Durante el verano, Schlick se encontraba en Stanford y Wittgenstein sólo le pudo comunicar que su trabajo hacía buenos progresos y que trataría los resultados con él en cuanto se le presentara ocasión. Esta tuvo lugar a su regreso a Viena para las vacaciones navideñas. Waismann se encontró por lo menos seis veces con ambas personalidades en la casa de Schlick y

fue durante o luego de esos seis encuentros cuando redactó los apuntes que aparecen en el primer capítulo de este libro. La actitud fue más objetiva y formal que antes; Waismann pudo realizar diagramas durante las conversaciones (como se verá). Dos fueron los motivos de tanta seriedad: en primer lugar, Wittgenstein tenía resultados que comunicar y se declaró dispuesto a dar lecciones en Cambridge, y en segundo lugar, comprendió (como se puede deducir de una carta de 1932) que estas conversaciones eran un medio de ofrecer su material de pensamiento a los otros miembros del Círculo de Schlick.

En todo caso, son éstas las primeras conversaciones transcritas que poseemos. En los dos primeros días solamente se copiaron las charlas de Wittgenstein; pero para fines de las vacaciones a todas vistas había concluido la explanación de las ideas ya formuladas, pues se encuentran bastante frecuentemente observaciones, preguntas y discusiones con Schlick y Waismann, lo mismo que discusiones no preparadas de Wittgenstein sobre ideas de Husserl, Heidegger y Weyl.

Durante las vacaciones de pascua, cuando Wittgenstein se volvía a encontrar de nuevo en Viena, sólo tuvo lugar una entrevista sobre la que tengamos apuntes (Cap. II de este libro), en la que Wittgenstein aclaró su distinción entre *aserción* e *hipótesis,* lo que ejerció cierto influjo en el Círculo de Viena.

Poseemos apuntes de dos encuentros en el verano de 1930 (Cap. III). En el primero (19 de junio) explicó a Waismann sus puntos de vista sobre cierta cantidad de temas matemáticos, pues éste debía sostener una conferencia el mes de septiembre en Königsberg, durante la Segunda Convención sobre Conocimientos de las Ciencias Exactas. Wittgenstein estuvo totalmente de acuerdo con el plan y se mostró muy decepcionado cuando, durante el verano, en una ocasión pareció que Waismann no podría participar en la convención. No obstante, sí le fue posible, y su conferencia intitulada "La esencia de las matemáticas: el punto de partida de Wittgenstein", aunque no estaba anunciada en el programa, ocupó el cuarto lugar en un grupo prominente de ponencias, al lado de la de Carnap sobre los fundamentos logicísticos de las matemáticas, de la de Heytings sobre los institucionalísticos y la de Neumann sobre los formalísticos. Estas tres últimas fueron publicadas en *Erkenntnis* 2 (1931), págs. 91*ss.,* pero el manuscrito de Waismann escapó al editor.

En la discusión (págs. 138*ss.*), Hahn y Carnap hacen referencia a las palabras de Waismann. Hahn habla de la polémica

de Wittgenstein y de los institucionalistas "contra la concepción de que el mundo consta de individuos, propiedades de individuos, propiedades de dichas propiedades, etc., y que los axiomas lógicos solamente son aserciones sobre este mundo". Los otros puntos que citan Hahn y Carnap están ya en la redacción a máquina de la primera parte de las obras póstumas de Waismann, donde se contiene la conferencia (harto corregida). Dichos puntos son: la distinción entre *operación* y *función* (véase *Apéndice A)* y el principio metodológico que se formula de la siguiente manera:

El significado de un concepto matemático es el modo de su uso; el sentido de una proposición matemática, el método de su verificación.

En la exposición debía tratarse lo siguiente:

1. La naturaleza de los números;
2. La idea de infinito;
3. El concepto de cantidad;
4. El principio de la inducción completa;

pero solamente nos ha llegado la primera parte y quizás no completa. En el *Apéndice A* se encuentran unas observaciones sobre las matemáticas que habría hecho Waismann por esa época más o menos y que dejó circular entre algunos amigos como transcripción de los puntos de vista de Wittgenstein. Una copia de dichas observaciones fue vista por Stein en Viena a finales de 1930. Algunas partes del *Apéndice* contienen extractos de los apuntes de Waismann, hoy en parte perdidos. Los extractos de Engelmann, recientemente encontrados, llevan el título: "Oralmente de L. W. (notas de antes de 1930)." Aunque es verosímil que el material del *Apéndice A* hubiera sido escrito a máquina en 1930 y multicopiado, mientras Waismann preparaba para su publicación la conferencia que diera en Königsberg, es posible no obstante que las conversaciones de donde procede el material hubieran tenido lugar antes de diciembre de 1929. Esto explicaría la ausencia de ese material del *Apéndice A* en los cuadernos de apuntes publicados aquí, lo mismo que las pocas anotaciones que hay en ellos si se trataba de la preparación de su ponencia en Königsberg.

Ni en el *Apéndice A,* ni en las observaciones de Waismann, del verano de 1930, ni en el informe de *Erkenntnis* sobre la convención de Königsberg encontramos rastro alguno del argumento de Wittgenstein contra la definición de Frege y de Russell del número por la equipolencia numérica, que fue explicada por primera vez en Cambridge en el trimestre de otoño

de 1930 y que aquí aparece como *suplemento* (pág. 90) a lo que se dijo en Königsberg. Aunque tuvo que suspender el trabajo, que para agosto ya estaba casi completo en otro manuscrito, Waismann se alegró de poder rendir su ponencia en Königsberg. Sentía que era ya tiempo de dar a conocer las ideas de Wittgenstein y hacer que se le tributara la atención merecida. Las ideas fueron recibidas con respeto durante la convención y consideradas en cuarto lugar, junto a las tres escuelas filosóficas más importantes del momento, pero la omisión por parte de Waismann de publicarlas (quizás porque Wittgenstein estaba elaborando nuevas ideas) y la profunda impresión que causó el descubrimiento anunciado en Königsberg por Gödel * menguaron en mucho el efecto de los pensamientos de Wittgenstein.

Waismann escribió a Schlick que él regresaría a Viena el 10 de septiembre y que vería a Wittgenstein el 20. Al parecer, Schlick no estuvo presente a la segunda conversación que poseemos del verano de 1930 (págs. 94 *ss*). Como la primera, parece que no consistió más que en ininterrumpidas explicaciones de Wittgenstein.

IV

En 1930 o a principios de 1931,[9] Waismann concluyó el manuscrito de sus "Thesen" y lo dejó circular entre sus amigos en dos recensiones escritas a máquina, no diferentes en lo esencial. La que parece posterior de las dos se ha impreso aquí como *Apéndice B*. Podría ser muy bien que las "Thesen" fueran una parte de su obra *Logik, Sprache, Philosophie;* quizás la que correspondería a *Sprache* (lenguaje).

Una versión anterior de la mayor parte de las "Thesen" viene en las obras póstumas *(Nachlass)* de Waismann bajo el título *Einführung zu Wittgenstein (Introducción a Wittgenstein),*

[9] Stein recibió su ejemplar a principios del año 1931, en Palestina.

* Kurt Gödel, famoso por una serie de teoremas lógicos por él descubiertos, como el teorema de la incompletividad y el estrechamente relacionado de la imposibilidad —bajo determinadas circunstancias— de formalizar una prueba consistente de un sistema lógico, dentro de ese sistema. A él también pertenece el intento de formalizar la sintaxis de la lógica como un cálculo, etc.

Parece que fue el teorema gödeliano acerca de la existencia de proposiciones verdaderas pero improbables en el sistema de *Principia Mathematica,* lo que hizo virar drásticamente a Wittgenstein del *Tractatus* a las *Investigaciones filosóficas.* [T.]

que también trata de filosofía, pero de forma harto fragmentaria. El texto de la exposición de Waismann "Das Wesen der Logik" ("La esencia de la lógica") del 8 de mayo de 1930, que también está contenido en su *Nachlass* (obras póstumas), constituían el tercer elemento del libro en su proyecto. Por cuanto se deja adivinar en general por su anuncio en *Erkenntnis 1* (1930-31), pág. 325 y en *Erkenntnis 2*, del 15 de marzo de 1931, págs. 82 y 311, bajo el mismo título de la conferencia sostenida por Waismann, el orden no es idéntico al de las "Thesen", de la *Einführung* o de la recensión más antigua del libro arriba citado. Es claro que Waismann experimentó diferentes ordenamientos de un material que era el mismo esencialmente.

Las "Thesen" llevan la intención de explicar algunos puntos fundamentales del *TLP*, mediante nuevas ideas como, *v. gr.* por medio del esclarecimiento del sentido a través de la verificación, y el concepto de hipótesis. Independientemente de la incorporación de este nuevo material, el objeto del libro era explicar de forma fácilmente comprensible los resultados del *TLP*, sin emprender su discusión. Veremos cómo Wittgenstein, al discutir dicho trabajo con Waismann en diciembre de 1931, mostró de manera apremiante como era usual en él, su oposición a "un recuelo de dichas tesis". Tal observación ejerció sin duda su efecto sobre los planes que Waismann tenía para el libro.

V

Los encuentros de que se habla en el capítulo IV tuvieron lugar durante las vacaciones navideñas de 1930-31. El primero de ellos se celebró en Neuwaldegg. Los hermanos de Wittgenstein no solían estar en la casa por aquella época del año, así que el filósofo podía sentirse retirado en la soledad y paz de la casa vacía. Éste fue quizás el motivo de que lo visitara Waismann. Ambos discutieron *Fragen der Ethik (Cuestiones de Ética)* de Schlick, que había recibido Wittgenstein el trimestre anterior mientras estaba en Cambridge, y también *Neubegründung der Mathematik (Nueva fundamentación de las matemáticas)*.

Las reuniones posteriores a la navidad tuvieron lugar otra vez en la casa de Schlick. Waismann quiso transcribir estas últimas, pero no lo hizo. Las demás trataron de filosofía de las matemáticas y —a petición de Schlick— del sentido de las

proposiciones que tienen dos o más métodos diversos entre sí para comprobarse. El capítulo concluye con algunos suplementos. En ellos se explica Wittgenstein con más detalle sobre puntos tratados anteriormente (los lugares que no son más que repeticiones se han omitido en este libro) y presenta parte de la crítica, ya citada más arriba, a la definición de Frege y de Russell sobre el número y la equipolencia numérica. Estos suplementos parece que fueron escritos luego del 4 de enero de 1931 y, sin duda, antes del 21 de septiembre de 1931. En ellos, Wittgenstein hace referencia a una lección dada en Cambridge con anterioridad, donde expuso la misma crítica. Esto sucedió, según se deduce de los apuntes de G. E. Moore, durante el periodo académico llamado Michaelmas * de 1930.

Para pascua de 1931, Wittgenstein regresó a Viena, pero no se tuvieron conversaciones, quizás porque (según confesó a Schlick) se sentía muy cansado. Como siempre, resultó difícil para los tres pensadores coincidir en Viena durante el verano. Por lo mismo, sólo se transcribió una conversación (Cap. V de este libro) a la que asistió solamente Waismann, y fue con ocasión de una visita de éste a Wittgenstein. Se vieron en la gran casa, vacía para entonces, de uno de los hermanos de Wittgenstein, en Argentinierstrasse. Wittgenstein solía conversar con sus amigos en uno de los despachos de la planta baja, para proseguir luego la conversación por la calle. Trataron de un manuscrito que llevaba Wittgenstein. Waismann le hizo algunas preguntas que se deducían de anteriores conversaciones sobre filosofía de las matemáticas.

Schlick pasó el semestre de invierno de 1931-32 en California, y en noviembre Wittgenstein le escribió algo intranquilo por el libro planeado por Waismann. Creía que "iba a explicar muchas cosas de modo muy distinto a como él juzgaba que era el correcto". En la misma ocasión señalaba cuánto se había separado de la posición del *TLP*. "No estoy de acuerdo con *muchas, muchas* formulaciones del libro."

Ambos elementos se transparentan en los apuntes que Waismann extrajo de las conversaciones tenidas de nuevo durante el invierno en Neuwaldegg (parte del Cap. VI). Empieza con la sección "Sobre el dogmatismo", donde aparece la fuerte crítica ya citada sobre las "Thesen". Es probable que por ese tiem-

* *Michaelmas*, 29 de septiembre. Es uno de los días tradicionales de inicio de trimestre. En Cambridge, abre el trimestre que va desde el 3 de octubre al 19 de diciembre. En Oxford son otros los días correspondientes. [T.]

po hubieran apuntado las primeras ideas de *Logik, Sprache, Philosophie,* como explanación de fácil comprensión de las tesis capitales del *TLP,* aunque como veremos, Waismann estaba trabajando en un libro en que explicaría ideas posteriores de Wittgenstein.

En marzo de 1932 escribía de nuevo Wittgenstein a Schlick: "¿Ha recibido las notas de Waismann que yo le dicté durante las navidades?" Esta pregunta podría hacer referencia a la sección sobre dogmatismo y a la discusión resultante sobre la filosofía de las matemáticas, del 9 de diciembre de 1931, aunque también podría ser la llamada "Añadidura al dictado" [10] que constituye el resto del Cap. VI.

En los apuntes de Waismann siguen extractos de un manuscrito de Wittgenstein que en parte coinciden con *PhB* y en parte con *MsBd IV.* Esos extractos no se publican aquí, porque *PhB* aparecieron ya, y *MsBd* se darán a la luz, por lo menos en parte.

El sexto y séptimo cuadernos de apuntes de Waismann traen el subtítulo *(Math.).* El sexto empieza con fragmentos de un manuscrito de Wittgenstein que se ocupa de la filosofía de las matemáticas y que de nuevo en parte coinciden con *PhB* y en parte con *MsBd IV.* Tampoco se presentan aquí. El siguiente parágrafo consta de una conversación dictada el primero de julio. Durante la pascua no se tuvieron conversaciones, a pesar de que Wittgenstein, en una carta del mes de marzo, expresó la esperanza de verse con Schlick.[11]

Los encuentros de verano tuvieron lugar, como es característico, en la casa vacía de Argentinierstrasse. Esto significa, al parecer, que solamente se hallaba Waismann. La discusión aparece muy fragmentada y es probable que tuviera como punto de partida el artículo de Carnap: "Die physikalische Sprache als Universalsprache der Wissenschaft" ("El lenguaje físico como lenguaje universal de la ciencia").[12]

10 Este título deja suponer un documento separado, transcrito sea por Waismann, sea por algún otro, según dictado de Wittgenstein. Parte del mismo se encuentra en el cuaderno de apuntes reproducido aquí. No se sabe, sin embargo, de la existencia de escrito alguno que contenga todos estos puntos.

11 Por ese tiempo, Wittgenstein vio poco a Schlick en Viena sin la compañía de Waismann; en realidad, Frau Schlick recuerda exclusivamente una ocasión.

12 Carnap había expresado algunas ideas de ese artículo en una conferencia del mes de febrero o marzo de 1931 *(Erkenntnis 2* (1931), pág. 311), que se imprimió en el curso de ese mismo año *(ibid.* pág. 432 *ss.).*

El resto del cuaderno de apuntes número 6 y todo el número 7 (salvo algunos extractos de *NL*, insertados el año 50) constan de sumarios de *GdM*, que tampoco se publican aquí, pues lo será el manuscrito original por obra del señor Rhees. Parece que después de esto ya no hubo más conversaciones que fueran transcritas. El profesor Kraft afirma que después de 1932 no se puso más por obra el viejo método de enlace entre Wittgenstein y el Círculo de Viena. Con las más recientes ideas de Wittgenstein, Waismann ya no se presentó por los encuentros. Parece que Wittgenstein sospechó que ese método de difusión de sus ideas podría conducir a publicaciones desfiguradas que no recabaran el debido reconocimiento.

En adelante se encontró con Schlick, pero sin Waismann. El verano de 1933 pasó las vacaciones en Italia con él y emprendieron discusiones intensas y agotadoras. Parece que también sucedió igual durante otras vacaciones estivales. A veces dictaba a Schlick; el producto (dos escritos a máquina y un par de páginas de contenido diferente) pasó a los albaceas de Wittgenstein. Continuó, empero, enviando copias de algunos de los escritos a máquina, reunidos y dictados por él, a Schlick y a Waismann, con quien también se veía con el fin de discutir el libro comentado que Waismann preparaba. Por fin, seguramente antes de la pascua de 1934, coincidieron en un plan de trabajo conjunto; estudiaron la disposición de la obra y Wittgenstein esbozó oralmente lo que, según su opinión, debía ser el principio del libro. Cuando se volvieron a encontrar durante el verano, se desdijo de dicho comienzo en esbozo y Waismann expresó así su temor respecto a la obra:

> Tiene el don admirable de ver siempre las cosas como si fuera la primera vez. Creo que con esto se ve cuán difícil ha de ser un trabajo de conjunto, pues continuamente sigue la inspiración del momento, con lo que echa por el suelo lo que poco antes ha ideado.

Por consiguiente, se acordó que Wittgenstein planeara el trabajo y Waismann lo desarrollara (aunque en este caso Waismann no estaba dispuesto a permitir que apareciera su nombre en la página titular). Parece que no se sacó nada en limpio, así que Waismann se entregó a dar forma definitiva a su libro *Logik, Sprache, Philosophie*, que debía ser propiamente suyo, por más que estuviera muy influido por Wittgenstein, quien entregó manuscritos para el mismo hasta 1935. No dis-

ponemos de más espacio aquí para tratar con más detalle la historia de ese libro.

La perdurable influencia de Wittgenstein sobre Schlick se echa de ver no sólo en los artículos publicados en *Gesammelte Aufsätze* (Viena, 1938) *(Analectas de artículos),* sino también en los apuntes de Schlick para seminarios y conferencias, incluso de los últimos años de su vida. Independientemente de los temas dictados y de los escritos a máquina ya citados, la hija de Schlick posee un ejemplar del *Blue Book* y una larga carta de julio de 1935 sobre el teorema de Gödel.

El asesinato de Schlick en junio de 1936, pérdida que Wittgenstein sintió profundamente, rompió el eslabón más fuerte que unía a éste al Círculo de Viena. La relación entre maestro y discípulos, por mediación de él y Waismann, que en un principio se mostró tan fructuosa, en adelante pareció inadecuada para ambos y nunca más se reanudó. Por lo demás, Waismann partió para Inglaterra en 1938.

VI

Finalmente, débese dejar constancia de la forma en que se han conseguido los apuntes de Waismann sobre estas conversaciones.

Se encuentran en siete cuadernos escolares grandes (16,5 × 20,5), de los cuales los primeros seis constan de 56 páginas de papel no rayado. Para tomar sus propios apuntes y esbozos, lo mismo que en el dictado, Waismann se servía de la taquigrafía de Gabelsberger.

En muchos casos debí solucionar algunos puntos editoriales, como abreviaturas y signos ambiguos (si, por ejemplo, "solamente" era mejor que "ahora", etc.). Ordinariamente, no doy noticia de estos casos generales, aunque en otras ocasiones dejo constancia de las correcciones y compleciones por medio de corchetes angulados,* por ejemplo: "Ex[[istencia]]". Ese mismo

* En esta primera traducción castellana de los coloquios de Wittgenstein se han sustituido los corchetes angulados de la versión en lengua alemana por corchetes dobles. Los corchetes simples y los paréntesis cumplen la función que se anuncia más adelante (véase la pág. 25), pero, además, los paréntesis encierran, en nuestra edición, la traducción libre de títulos de libros y de otros textos citados. Los asteriscos señalan valiosas aclaraciones exegéticas del traductor [T.] mediante comentarios y acarreo de los lugares pertinentes a ellos, con lo cual juzgamos que gana en mucho la intelección de los textos de este libro.

tipo de corchetes angulados se emplea también en todos los títulos que he añadido. Son míos igualmente todos los números de los títulos. De ordinario, los apuntes de Waismann contienen el escrito en la página derecha. La página de la izquierda (reverso) la empleaba para hacer añadiduras, correcciones y explicitaciones de lo que había escrito al lado derecho. A menudo el contenido de la página izquierda no es más que perfeccionamientos o enmiendas de los apuntes que había hecho originalmente. Siempre que he juzgado que se trataba de esto, lo he omitido de acuerdo a un principio que luego explicaré. No obstante, en su mayor parte parece que el contenido de la página izquierda se debe a intentos posteriores de Waisman de transcribir lo que Wittgenstein había dicho cuando explicaba lo que estaba apuntado en la página derecha, o bien, son observaciones posteriores del propio Wittgenstein sobre el mismo tema. A veces ese material recibe el nombre de *Suplemento* (págs. 25 y 32) * y suele contener comunicaciones, ora de Waismann ora también de Wittgenstein, u observaciones que inequívocamente procedían de Wittgenstein (pág. 174) o se le atribuyeron posteriormente (pág. 98; comparar con pág. 107). Por tanto, la mayor parte del material de la página izquierda de los apuntes lo presento al pie de página y lo uno con el texto correspondiente de la página derecha de los apuntes por medio de números.

Cuando Waismann utiliza la página izquierda para el texto, naturalmente no he hecho distinción. En general, sucede así cuando no transcribe la conversación normal sino que copia de un manuscrito o al dictado de Wittgenstein. Es de notar que la "Añadidura al dictado" está escrita en la página derecha, y las compleciones de la página izquierda correspondiente contienen observaciones de Wittgenstein, y otros argumentos y parágrafos.

En el estenograma hay gran cantidad de enmiendas interlineares y correcciones. Cuando Waismann tacha algunas palabras y las sustituye por otras, he supuesto que estas últimas son las que representan la última versión de Wittgenstein. Cuando deja una expresión y sobre ella o en la página opuesta trae otra variante, he supuesto que la enmienda quería utilizarla Waismann para sus explicaciones y la palabra original era la expresión auténtica de Wittgenstein. A menudo esas enmiendas se han realizado con grafía confusa y apiñada, que es la

* Entiéndase que estas y las siguientes páginas citadas corresponden a los apuntes originales de Waismann. [T.]

misma que utiliza Waismann cuando transcribe apuntes propios o esbozos y no copias al dictado o de lecturas. A veces el estilo es mejor y se acerca más a la redacción científica. En un lugar (pág. 140), donde Wittgenstein emplea el ejemplo "mi hermano", sustituye Waismann "mi amigo". En esta edición he dejado de lado todas las enmiendas, pues me he propuesto presentar intacto el texto que Waismann recibió de Wittgenstein.

En este volumen se han respetado en general los corchetes y paréntesis como los escribió el propio Waismann, con el fin de mostrar sus observaciones, añadiduras y objeciones. A todas vistas, se le ocurrían mientras estaba transcribiendo los apuntes, fuera durante la conversación o luego; pero en todo caso no pertenecían a la conversación. Sus propias aportaciones a las conversaciones las señalaba de otra manera, por ejemplo: "Pregunto a Wi" (en este libro se ha perifraseado como "Waismann pregunta a Wittgenstein"), seguido de la pregunta; todo sin corchetes.

En muchos lugares, que se han señalado en el texto, Waismann deja una o dos páginas en blanco para los apuntes de una conversación de la que solamente nos ha llegado el título. Similarmente, se encuentran aquí y allá espacios sin título que, por la costumbre de Waismann de emplear una hoja nueva cada día, no se pueden aclarar. De ello se puede concluir: primero, que Waismann muchas veces tenía *el propósito* de transcribir una parte de una conversación cuando se concluyera; en segundo lugar, que en general tomaba las conversaciones mientras tenían lugar. Sólo así se puede entender que hubiera escrito exclusivamente el título en el cuaderno de notas. Si al día siguiente *no* tomaba la conversación en forma directa, o llenaba los espacios antes de transcribir o simplemente no dejaba espacios, porque sabía que ya no los llenaría. Podemos conjeturar que los cuadernos de apuntes eran tomas del momento de la conversación. Esta conjetura queda corroborada por lo siguiente: primero, el texto no estaba redactado para servir en una conferencia, sino que requería las citadas "enmiendas"; en segundo lugar, Waismann describe una vez su escrito como "versión aproximada" (pág. 51), como si no siempre fuera así; en tercer lugar, encontramos diagramas interrumpidos, como si el taquígrafo no se hubiera dado abasto.

A pesar de todo, no tenemos aquí la expresión directa de Wittgenstein, sino la versión de Waismann sobre aquélla, salvo fragmentos de manuscritos no impresos aquí. No siempre

pudo seguir el curso de las ideas y se dejó cosas que Wittgenstein consideraba especialmente importantes. Si a esto añadimos que estas expresiones no son consideraciones de Wittgenstein, sopesadas y preparadas para la imprenta, como lo fueron *PhB*, deduciremos que solamente bajo la mayor reserva podemos tomar estos apuntes como muestrario de las opiniones de Wittgenstein. Más bien se han de considerar un comentario eventual al *TLP* y a *PhB* y, siempre que haya lugar, con esos escritos se han de cotejar.[13]

VII

La publicación de cuanto aparece en este libro fue autorizada por los albaceas de Waismann, profesores Gilbert Ryle, Sir Isaiah Berlin y Stuart Hampshire. Quedo muy agradecido a ellos, y especialmente al profesor Ryle, por su ayuda y encarecimiento. A su vez, los albaceas de Wittgenstein (Miss Elizabeth Anscombe, Profr. G. H. von Wright y Rush Rhees) dieron su venia para que fueran publicadas las ideas de Wittgenstein contenidas en el texto y las citas de sus cartas. Además, el señor Rhees fue extraordinariamente pródigo de su tiempo y de su inapreciable conocimiento de la herencia de Wittgenstein. Sólo él hizo posible que yo pudiera decidir qué material lo poseía solamente Waismann y, por ende, era digno de ser llevado a la imprenta. También los sobrinos de Wittgenstein, el Dr. T. Stonborough y el señor J. Stonborough, dejaron material a mi disposición y me concedieron permiso para que citara un fragmento de una carta de su madre.

Reproduzco las palabras de Schlick con permiso de su hija, Frau Barbara, viuda de Velde. Asimismo, Mrs. Lettice Ramsey me permitió publicar algunas cosas de una carta de su marido.

Me fue entregado mucho material por el profesor F. A. von Hayek, por el doctor H. L. Mulder y por el profesor H. Hänsel. En la disposición de los *Apéndices* fueron de mucha ayuda el Dr. Josef Schächter, de Jerusalén, y el señor Shimshon Stein, de Tel-Aviv. Por los comienzos de la investigación de las obras póstumas de Waismann cooperaron en gran medida su discípulo J. Hevesi y su amigo el Dr. H. Motz.

La copia del texto taquigrafiado quedó a cargo de la malograda Fräulein Mühlfeld (antes secretaria de Waismann), del Dr. Hoffmann, de Londres; del Dr. Karl Pichl, de Viena; y en

[13] En el índice analítico me he esforzado por mostrar dónde y cuándo el mismo tema aparece en *PhB*.

su mayor parte del señor Heinrich Matzinger, de Zürich. A todos quedo obligado, pero particularmente al señor Matzinger, por la notable buena disposición y cuidado que puso en este libro.

Me fue proporcionada mucha información de importancia, sobre la vida de Wittgenstein y sobre el Círculo de Viena, por los profesores Viktor Kraft, Bela von Juhos y Kurt Reidemeister; por los doctores Neider y Hollitzscher, y por el amigo de toda la vida de Wittgenstein, Rudolf Koder.

Para la aclaración de algunas cuestiones matemáticas, me prestó su ayuda más amable mi colega, el señor P. M. Neumann.

La traducción de este prólogo y de notas al alemán fue realizada por la señora Magda Minio-Paluello.

La British Academy subvino a los gastos de la copia del material, y la Leverhulme Foundation me costeó una estancia en Viena, necesaria para la consecución de información. A ambas instituciones rindo aquí mi reconocimiento de gratitud.

I

Miércoles, 18 de diciembre de 1929 (con Schlick)

[[La demostración en matemáticas]]

En matemáticas existen dos métodos diferentes de demostración:

1. Una ecuación se relaciona con otra, que es tenida por correcta. Por ejemplo:

$$16 \times 24 = 384$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

2. Se cree que los axiomas de la aritmética, v. gr., la ley asociativa, se demuestran por medio de la inducción completa; pero en realidad no hay tal demostración. Se ve esto claramente si se atiende a que en la demostración aparece la ecuación que se quiere demostrar. La inducción nos da solamente lo que puede dar, y nada más. Por ejemplo: $1:3 = 0{,}333$
10
10
10

Todo lo que se quiera *decir* además, por ejemplo, que se sigue una serie infinita de treces, no pertenece propiamente a las matemáticas, pues es más bien una situación particular. Otros creen que la inducción completa sólo es un medio para llegar a una determinada proposición, y también que todavía cabe una conclusión más referente al método de la inducción, que dice: *luego,* la proposición tiene valor con todos los números. Pero ahora pregunto yo: ¿a qué viene ese "luego"? ¡No hay tal "luego"! La inducción completa es ya la proposición que se ha de demostrar. Lo es todo; no sólo el camino de la demostración. El método no es un vehículo para llegar a algún lugar. En matemáticas no hay primeramente una proposición que tiene sentido por sí misma y en segundo lugar un método para dilucidar la verdad o falsedad de una proposición, sino solamente el método, y lo que se llama proposición es sólo un modo más breve de llamar al método.*

* Proposición es monosilábico en alemán (Satz), en contraposición a Methode. [T.]

Ahora bien, se pueden presentar axiomas (las reglas literales del álgebra, a + b = b + a, etc.) que son convencionales en sí, pero que se emplean de acuerdo con la inducción completa. Puedo operar con tales reglas, mientras en la ecuación me refiera a unas normas básicas. Pero hay algo que esas normas no pueden esclarecer: precisamente lo que nos da la inducción completa. Esto se ve, sin lugar a dudas, en la presencialidad de esas reglas en los números concretos; al paso que el ser de la inducción completa no aparece en las matemáticas en la configuración de una proposición o en la conformación de un sistema de axiomas, sino que es inexpresable. La inducción completa se manifiesta en la construcción de ecuaciones. Los axiomas no se pueden demostrar, sino que tienen el valor lógico de proposiciones fijas.

¿Qué significa la búsqueda en las matemáticas? [1]

No se puede ir tras * un sexto sentido. No se puede buscar en lo azul. Puedo buscar un objeto en un espacio, por ejemplo en un cuarto. Pero ¿qué significa ir tras algo en matemáti-

---

1] Lo que encontramos en los libros de matemáticas no es *descripción de algo,* sino la cosa misma. Nosotros *hacemos* la matemática. Lo mismo que se dice "escribir historia" y "hacer historia", en cierto sentido vale también para las matemáticas.

Las matemáticas son su propio empleo. Esto es de grandísima importancia, pues de ello se sigue mucho. Cuando yo digo 3 ciruelas + 4 ciruelas = 7 ciruelas; 3 hombres + 4 hombres = 7 hombres, etc., no he empleado los números en distintos objetos, sino que tengo ante mí el empleo mismo. Los números no vienen representados, sino que *son*. Los que son representados son los objetos.

La corrección de la proposición aritmética no se legitima por el hecho de que toda proposición es una tautología.** En el

* Para hacer resaltar el matiz que le da Wittgenstein, aquí he traducido el verbo buscar (suchen) por "ir tras", cuando lleva la preposición *nach* (tras), y por "buscar", cuando está con la preposición *in*. [T.]

** En lógica matemática se llaman tautologías aquellas fórmulas proposicionales cuyos predicados siempre resultan lógicamente verdaderos. Wittgenstein habla así de la tautología en el *TLP:*

4.461 La proposición muestra lo que dice; la tautología y la contradicción muestran que nada dicen. La tautología no tiene condiciones de verdad, puesto que es verdadera incondicionalmente; la contradicción bajo

cas? El espacio tiene lugares abiertos. Si he buscado bien en una habitación, puedo pasar a otra. Mas no existen esos lugares abiertos en matemáticas. Un sistema matemático, por ejemplo, el sistema de la multiplicación ordinaria, está completo en sí mismo. Sólo puedo buscar *en* el sistema, no *tras* el sistema. ¿Cuánto es 242·897? Aquí se trata de una pregunta circunscrita al sistema, aunque haya infinidad de semejantes preguntas y respuestas. Puedo ir tras una respuesta sólo porque existe un método para hallarla. Asimismo, el álgebra (cálculo literal) es un sistema cerrado en sí mismo, e igualmente la trigonometría elemental que se enseña en las escuelas. Por ejemplo, puedo preguntar:

$$\text{¿es el } \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{tg}^3 x?$$

Pero no puedo preguntar:

$$\text{¿es el sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots?$$

Esto no se debe a que la trigonometría elemental sea en sí misma incompleta, o a que tenga lugares abiertos que precisen de una compleción y que el análisis sea tal vez esa compleción. No; no se trata de eso, sino de que nos hemos pasado a otro

---

modo de expresión de Russell la proposición 3 + 4 = 7 se puede representar así:

$$(\text{E}3x)\,\varphi x.\ (\text{E}4x)\,\psi x.\sim(\exists x)\,\varphi x.\psi x:\supset:(\text{E}7x)\,.\varphi x \text{v} \psi x.$$

Se podría creer que la demostración de esa ecuación es posible, porque la proposición que contiene es una tautología. Pero para poder escribir la proposición, debo saber de antemano que 3 + 4 = 7 existe. Toda la tautología no pasa de ser un empleo de la aritmética; no su prueba. La aritmética es la que se emplea en la formación de la proposición; que de ahí surja una tatutología es inesencial del todo, y puedo emplear dicha ecuación aritmética tanto en proposiciones con sentido, como en tautologías.

ninguna condición es verdadera. Tautología y contradicción carecen de sentido...

4.4611 Pero ni la tautología ni la contradicción son cosas sin sentido, sino que pertenecen al simbolismo; similarmente a como el cero pertenece al simbolismo de la aritmética.

4.462 Tautología y contradicción no son representaciones de la realidad, pues no representan situación alguna; aquélla porque concede todas las situaciones, ésta porque no concede ninguna. [T.]

nuevo sistema que no contiene el anterior, aunque posea una parte con la misma estructura del sistema anterior. Ejemplos sencillos son los números naturales y todos los números. Los números naturales no son idénticos a los números positivos, de modo que podamos hablar indistintamente de más dos soldados o de dos soldados, sino que estamos ante algo totalmente nuevo. Lo mismo se ha de decir si se quiere pasar de las funciones trigonométricas fundamentales a las funciones analíticas progresivas. Como descubrimos que algunas de esas funciones tienen las mismas propiedades que las conocidas de trigonometría, como sen x, etc., ordenamos aquéllas según estos modelos elementales, pero hay que tener presente siempre que no podemos pasar de un sistema al otro por extensión simple, y que aunque una proposición tenga sentido en el segundo sistema, no por eso debe tenerlo también en el otro. El nuevo sistema no es perfeccionamiento del anterior, pues el sistema anterior no tiene lugares abiertos. Lo que no se tiene todavía, no se tiene en absoluto.

No puedo llegar a lo mismo sistemática y asistemáticamente.

No puedo deducir de la sola proposición si pertenece a un determinado sistema.

No puedo decir con el lenguaje del primer sistema qué es solucionable y qué no lo es.

No cabe la pregunta.

Ejemplo: División tripartita del ángulo

¿Puedo ir tras ella en la geometría elemental? La imposibilidad de su construcción no puede verse en el sistema de la geometría elemental, sino en el sistema de los números y ecuaciones algebraicos sobre los que viene proyectada la geometría elemental. Este sistema es más comprensivo y nos permite dar carácter algebraico a las formas representables con compases y tiralíneas. En ese sistema, la pregunta acerca de la tripartición sí tiene sentido claro, y al mismo tiempo dicha pregunta dispone de un método de contestación. Ahora bien, la pregunta en general ¿tiene sentido claro en geometría elemental? Se podría responder de inmediato: sí, pues algo tiene que haber movido a tanta gente a intentar solucionar el problema.

Símil: Deshacer un nudo

¿Qué sucede cuando no hay tal nudo, sino que solamente lo parece? Entonces no se puede intentar deshacerlo, sino sólo

remedar algo que se parece a deshacer un nudo. En realidad y en sentido estricto, no se puede ir tras deshacer el nudo. Sería imposibilidad *lógica* intentarlo.

Tanto menos se puede intentar ir tras la solución de la división tripartita del ángulo. No cabe la pregunta en el sistema. Lo que en realidad hago es *extender mi sintaxis.*

Weyl [1] formula el problema de la resolubilidad así: ¿Se puede resolver cada pregunta *correspondiente* con ayuda de inferencias lógicas? Todo depende de la palabra "correspondiente". Para Weyl, una aserción es correspondiente cuando está construida con ciertas formas fundamentales que constan de siete principios de combinación (entre ellos "todos" y "hay").[1a] Aquí está la falla. Una aserción puede llamarse correspondiente cuando pertenece a *determinado sistema.* En este sentido se puede afirmar: cada pregunta correspondiente es solucionable.

Lo que a simple vista no es correspondiente, no lo es en absoluto.

La geometría como sintaxis I

Einstein [2] dice que la geometría tiene que ver con las posibilidades de situación de los cuerpos sólidos. Cuando describo situaciones de los cuerpos sólidos por medio de lenguaje, entonces la *sintaxis* de ese lenguaje sólo puede corresponder a las *posibilidades* de situación.

[No hay problema, por tanto, en que dominemos toda la multiplicidad del espacio con unos pocos axiomas (ya que el espacio es una "multiplicidad definida" (Husserl)[3]), pues no hacemos sino establecer la sintaxis de un lenguaje.]

Incontradictoriedad I [4]

Domingo, 22 de diciembre de 1929 (con Schlick)

[1] H. Weyl. "Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft" en *Handbuch der Philosophie,* editado por A. Bäumler y M. Schröter, II tomo. Munich y Berlín, 1927, pág. 20 (= *Philosophy of Mathematics and Natural Science,* Princeton, 1949, pág. 24).

[1a] *Ibid.,* pág. 5.

[2] *Geometrie und Erfahrung,* Berlín, 1921, págs. 6-7; *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie,* Braunschweig, 1917, pág. 2.

[3] "Ideen zu einer reinen Phänomenologie", párrafo 72, *Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung,* I, 1913, pág. 133.

[4] De esta parte de la conversación de Wittgenstein no tenemos apunte alguno, pero en el cuaderno hay dos páginas y media en blanco; ver el "Prefacio de la edición alemana", págs. 24 *s.,* de este texto.

[["Todos" I]]

En primer lugar, hablaré del usual "todos", como "Todos los hombres que hay en esta habitación llevan pantalones". ¿Por qué sé esto? La proposición viene a indicar: "El profesor Schlick lleva pantalones, Waismann lleva pantalones, Wittgenstein lleva pantalones, *y ya no hay nadie más*". Toda enumeración completa ha de concluir con las palabras "y no hay más". ¿Qué significa esto? Se tiene aquí el mismo caso que cuando se dice: "El señor Carnap no está en la habitación, el señor... etc.", en que no aparece la proposición que se podría sospechar, a saber: "y esto es todo".

Supongamos que quisiera decir: "Veo un cuadrado y dentro de él un círculo". Es claro que aquí no existe enumeración alguna, sino otra cosa. Creo que aquí se da un tipo de proposición de la que no tenía sospecha antes y que, aproximadamente, corresponde a lo que podría llamar figura incompleta. Voy a explicar inmediatamente qué quiero decir. Se trata en todos estos casos de que hay algo, que ahora llamaré proposición elemental, que es una figura incompleta. Piensen en el siguiente caso: He visto dos paños del mismo color. Se puede creer que con ello se indica que "los dos eran verdes, o azules, o..."; pero es bien claro que no se puede indicar eso, pues no podríamos efectuar semejante enumeración. Por el contrario, la cosa está así: "hemos visto un paño de color x y otro de color x". Vemos que el análisis de Russell no cuadra en este caso. Y la diferencia está en que

$$(\exists x) .\varphi x.^{*}$$

Este esquema permite una doble negación: una externa y otra interna. Nuestro caso no tiene el carácter de una variable

* Véase lo que dice Russell a este respecto (Introducción al *TLP*, Revista de Occidente, Madrid, 1957, pág. 16):

> De este modo llegamos a la proposición que de ordinario se representa en lógica matemática por las palabras "fx es falsa para todos los valores de x". La negación de esto sería la proposición "hay al menos una x para la cual fx es verdad" que está representada por "$(\exists x)$. fx". Si en vez de fx hubiésemos partido de no-fx habríamos llegado a la proposición "fx es verdadera para todos los valores de x", que está representada por "(x) .fx". El método de Wittgenstein para operar con las proposiciones generales [es decir "(x) .fx" y "$(\exists x)$. fx"] difiere de los métodos precedentes por el hecho de que la generalidad interviene sólo en la especificación del grupo de proposiciones a que

aparente, sino de una variable real. Voy a que el análisis de Russell, que antes había tenido por valedero, en este caso no resulta. "En esta habitación no se halla ningún hombre" no quiere decir: "En esta habitación no se halla el profesor Schlick, ni el señor Carnap, ni el señor...". Creo ahora que el proceso al que llego cuando digo que no hay nadie en el cuarto, es el mismo que cuando digo que no hay ningún círculo dentro del cuadrado. "En el cuadrado hay un círculo" no tiene el sentido de: "O el círculo está en el cuadrado, o el círculo, o...". No se trata aquí de una enumeración, sino más bien de lo que llamo una figura incompleta.

Puedo describir un hecho que consiste en que un círculo de determinado tamaño se encuentra en determinado lugar de un cuadrado. Esta es una figura incompleta. Para lo subsiguiente, no importa qué tipo de descripción escoja, si —por ejemplo— utilizo las coordenadas, sino que la forma de descripción seleccionada posea la debida multiplicidad. Si, por ende, en esa proposición ocurren números que indican dónde se encuentra el círculo y lo grande que es, puede suceder que en vez de números introduzca variables o sólo intervalos, *v. gr.* [6-7, 8-9] y me quede también con una figura incompleta. Imagínense un retrato en que me haya dejado la boca. Esto puede significar dos cosas: primero, que la boca es blanca como un papel en blanco; en segundo lugar, que sea la boca como sea, la figura siempre será correcta.

La figura incompleta se debe a que en una proposición intervienen variables. Y ahora viene la pregunta: ¿cómo será la expresión correcta de la proposición? En mi opinión, la proposición no equivale a "$(\exists x).\varphi x$", sino a "φx". La diferencia entre los dos esquemas proposicionales es la siguiente: El esquema "$(\exists x).\varphi x$" permite una doble negación; no así el esquema "φx". Esto nos indica que el esquema "$(\exists x).\varphi x$" no tiene la correcta multiplicidad. Más aún, ¿qué resulta cuando desarrollo esa doble negación?

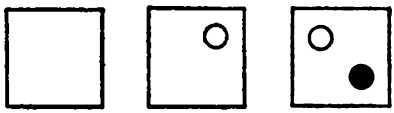
$$\sim(\exists x).\sim\varphi x = (x).\varphi x$$

Lo que quiere decir: "Los dos paños coinciden en todos los colores", "tienen todos los colores en común". Esto es un sin-

se refiere, y cuando esto se lleva a cabo, la construcción de las funciones de verdad procede exactamente, como en el caso de un número finito de argumentos dados, por enumeración, p,q,r... [T.]

sentido; * luego, también ha de ser un sinsentido la proposición "$(\exists x).\varphi x$". Luego "φx" es la proposición correcta, y no es sólo una preparación para la proposición. Creo ahora que en una proposición elemental se pueden saltar algunos datos. Entonces, la proposición es un retrato incompleto de un hecho atómico.**

Si ahora completo la descripción, ¿quiere decir que debo añadir a una proposición incompleta más proposiciones incompletas? ¿Es acaso la descripción completa la conjunción de las incompletas? Si realizo el siguiente dibujo:



Cada proposición es un signo. El signo no se compone del signo del cuadrado y del signo del círculo. Si me salto uno de esos signos, todavía tengo una figura —en contraposición al concepto usual de las cosas, en que por la omisión de una parte de la proposición solamente consigo la preparación a una proposición.

La proposición: "Hay un círculo negro en el cuadrado" no contiene más que las palabras "cuadrado", "negro", "círculo" y "en". Esto es todo. La proposición ya no puede decir más

* Sinsentido (Unsinn). La traducción del *TLP* de Revista de Occidente emplea "sin sentido". No cabe utilizar la palabra contrasentido, pues en Wittgenstein el término posee otro matiz. Una proposición puede tener sentido y, no obstante, ser un sinsentido (Unsinn), por ejemplo, "Esta mancha es azul" "Esta mancha es roja", tiene un sentido, pues *entendemos* que no puede ser, pero al propio tiempo es un sinsentido. Como dice el mismo Wittgenstein en este libro (*Apéndice A*, "Concepto y forma"), "Sinsentido equivale a ser asintáctico". [T.]

** Hecho atómico: "Un hecho que no tenga partes que sean hechos se llama por Wittgenstein *Sachverhalt*. Es lo mismo que aquello a lo que llama hecho atómico. Un hecho atómico, aunque no conste de partes que son hechos, sin embargo consta de partes. Si consideramos "Sócrates es sabio" como un hecho atómico, veremos que contiene los constitutivos "Sócrates" y "sabio". Si se analiza un hecho atómico lo más completamente posible (posibilidad teórica, no práctica), las partes constitutivas que se obtengan al final pueden llamarse "simples" u "objetos". Wittgenstein no pretende que podamos realmente aislar el "simple" o que tengamos de él un conocimiento empírico. Es una necesidad lógica exigida por la teoría como el caso de electrón. Su fundamento para sostener que hay simples es que cada complejo presupone un hecho. (Russell, Introducción al *TLP*. Revista de Occidente, Madrid, 1957, pág. 14.) [T.]

de lo que contiene, y si la entendemos indica que ya en esa forma incompleta existe una proposición.

La figura incompleta debe mostrar que es *incompleta.*[1] Se debe echar de ver en la proposición que es un retrato incompleto del hecho atómico. La proposición debe mostrar que en su derredor queda algo abierto; debe mostrar su apertura. *Una* proposición elemental describe todos los colores que hay en el espacio.

Quizás la cosa sea así: Todas las descripciones incompletas —todas las proposiciones incompletas con lugares abiertos— se concatenan para formar una proposición elemental completa.

¿Es la proposición completa la conjunción de las proposiciones incompletas?

Objetos

Depende de la representación que se tenga de los objetos. Siempre que Frege y Russell han tratado de objetos, lo han hecho refiriéndose a lo que al hablar expresamos por substantivos, digamos los cuerpos como sillas y mesas. Todo el concepto de objetos está en estrecha relación con la forma sujeto-predicado de las proposiciones. Es claro que donde no hay forma sujeto-predicado, tampoco se puede hablar en este sentido de objetos. De este modo puedo describir una habitación de manera totalmente diferente. Por ejemplo, así: describo la superficie de la habitación analíticamente por medio de una ecuación y doy la división de los colores en los distintos planos. Según este procedimiento de descripción no hay ya "objetos" individuales, sillas, libros, mesas y su situación en el espacio. Ya no tenemos una relación, pues nada de todo eso contiene nuestra descripción.

Con esto quiero decir lo siguiente: En todo el ámbito de las proposiciones elementales rige una proposición básica que dice: La forma de las proposiciones elementales no se deja prever. Es sencillamente ridículo pensar salirse con la acostumbrada forma del lenguaje ordinario, con relaciones sujeto-predicado y las demás relaciones duales. Ya con esto, a saber, que en la

---

1] Cuando describo completamente cuanto hay en la habitación, no tengo tampoco una figura completa, pues cabe preguntar qué hay fuera de la habitación. Por tanto, debo poder ver en la misma proposición que no se describe todo. La proposición ha de mostrar en algo su apertura.

proposición elemental lo mismo pueden salir números reales —o algo parecido a los números reales— se demuestra cuán diferente sea la proposición elemental de las demás proposiciones. Y todo lo demás que pueda resultar no lo podemos prever tampoco hoy. Sólo cuando analizamos los fenómenos de manera lógica, sabemos qué forma tienen las proposiciones elementales. Estamos en un campo en que no caben las hipótesis. La construcción lógica de proposiciones elementales no necesita tener la menor semejanza con la construcción lógica de las proposiciones.

Piensen por un momento en las ecuaciones físicas: ¡qué enorme complejidad en su construcción! Pues de semejante complejidad son las proposiciones elementales.

Siempre podré expresar los colores que veo, mientras dé los cuatro colores fundamentales: rojo, amarillo, azul, verde, y añada cómo aquéllos se forman de estos cuatro.

Discusión sobre la forma del cuerpo cromático. Los colores fundamentales muy nítidamente: [4a]

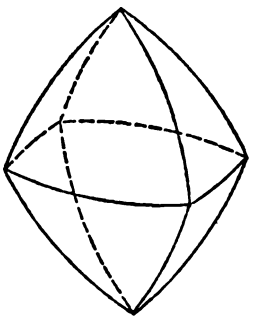
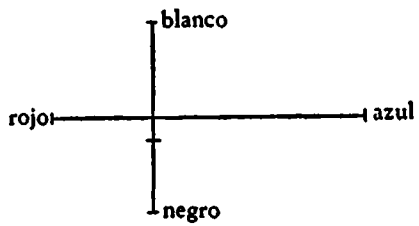


Diagrama de un color:



Con ayuda de esos símbolos, se puede representar cualquier afirmación sobre los colores. Si decimos que nos bastan los

[4a] La base de esto se aclara en *PhB*, págs. 278 *ss.*

cuatro colores fundamentales, entonces llamaré *elementos de la explicación* a esos símbolos equipolentes. Esos elementos de la explicación, son los "objetos".

Y ahora ya no tiene sentido la pregunta: ¿Son los objetos algo cósico, algo que está en el lugar del sujeto, o algo propio,[5] o son relaciones, y así sucesivamente? Podemos hablar de objetos sin más, no bien contemos con elementos equipolentes de explicación.

Ahora pueden ver ustedes que la pregunta sobre el número de objetos no tiene sentido alguno. De modo particular, no puede haber muchos objetos sin llegar a un fin. "Hay muchos sillones" = "hay infinitamente muchas posibilidades de sillones en la habitación". Mas, por el contrario, ya no se puede hablar así cuando un objeto es elemento de la explicación.

La multiplicidad lógica no se forma por sujeto y predicado o por relación, sino —por ejemplo— por ecuaciones físicas. Se entiende que en este caso no se habla de objetos individuales.

¿Qué significa "todos"?

1. *"Todos los hombres de esta habitación llevan pantalones".*[1]

Se trata de saber aquí, en primer lugar, si "hombre" es una forma o un predicado. Si "hombre" es una forma, como v. gr., "color", no puedo decir "a es un hombre", sino que ha de ser la sintaxis de "a" la que lo muestre. Si "hombre" es un predicado, entonces tenemos una proposición de la forma "a es un hombre".

"φx" = "x es un hombre"
"ψx" = "x lleva pantalones"
"Todos los hombres llevan pantalones" = "$(x):\varphi x.\supset \psi x$"
ó "$(x).\varphi x$"

"Todos los hombres de esta habitación", es el mismo caso de un círculo dentro de un cuadrado. Equivalente a: el profesor Schlick lleva pantalones, Waismann lleva pantalones, Wittgenstein lleva pantalones. Y la frase que se debe inferir, a saber: "fuera de ellos no hay nadie en la habitación", podría representarse sencillamente por "$\sim fx$.".

1] Russell: "He encontrado a un hombre" ("$(\exists x).\ fx$") es una afirmación indeterminada.

[5] El estenograma parece que dice "tiene alguna propiedad". En el escrito a máquina de las "Thesen" se lee "capaz de propiedad".

[Suponiendo que "hombre" sea una forma:

"φx" = "x está en la habitación"
"φx" = "hay alguien en la habitación"
"~φx" = "no hay nadie en la habitación"
"(∃x).φx" = "φavφbvφcv..."
"~(∃x).φx" = "No hay nadie que esté en la habitación"
"(∃x).~φx" = "Hay alguien que no está en la habitación"
"~(∃x).~φx" = "Todos están en la habitación."

Ahora se puede volver a argumentar: "Hay alguien en la habitación" sólo permite una negación. "(∃x).φx", por el contrario, acepta doble negación. Consiguientemente, el esquema de la proposición "Hay alguien en la habitación" no se emplea debidamente, según el símbolo de Russell.

"Todos los hombres de esta habitación llevan pantalones"

= φa.ψa.φb.ψb.φc.ψc.~φx

$x \neq a,\ x \neq b,\ x \neq c$

Aquí cabría la pregunta: Si se puede usar "(∃x).φx", ¿en qué se diferencia de "φx"? ¿O solamente se puede emplear "φx" y no "(∃x).φx"? ¿En qué funciones asertivas se puede emplear el operador-"(∃x)" y en cuáles no?]

2. *Aserciones sobre los colores*

Puesto que solamente se dan cuatro elementos de la representación: *rojo, azul, amarillo, verde,* cualquier aserción se puede retrotraer a una conjunción final:

rojo... y azul... y amarillo... y verde [[...]]

En este caso "todos" es también un producto lógico, pero un producto lógico *definitivo.*

3. *"Todos los números"*

Aquí vemos que la proposición fue mal comprendida y que la inducción completa no tiene que ver en absoluto con la totalidad de los números.

Solipsismo

Antaño creí que existía el lenguaje corriente, en el que ordinariamente nos entendemos, y luego un lenguaje primario que

expresaba lo que realmente sabemos, por consiguiente, los fenómenos.[6] También hablé de un primer sistema y de un segundo sistema. Ahora quisiera manifestar por qué ya no sostengo la misma opinión.

Ahora creo que, esencialmente, no poseemos más que un solo lenguaje, que es el lenguaje corriente. No es preciso inventar un nuevo idioma o construir una simbólica, puesto que el lenguaje corriente *es* ya *el* lenguaje, a reserva de liberarlo de las confusiones que lleva adheridas.

Nuestro lenguaje está perfectamente bien si hay acuerdo en lo que se quiere simbolizar. Los demás lenguajes diferentes del corriente son también valederos, mientras nos muestren qué es lo común entre ellos. Para determinados fines, *v. gr.*, para la representación de las relaciones en las inferencias, es muy útil una simbólica artificial. En realidad, Frege, Peano y Russell, al construir la lógica simbólica, sólo tuvieron presente su empleo en matemáticas y no pensaron en la representación de hechos atómicos reales.

Esos lógicos pensaron: si se nos sueltan todos los puntos, si resulta que estas formas lógicas no sirven en realidad, que nos queden al menos las matemáticas. Hoy vemos cómo tampoco sirven para las matemáticas, pues no encajan en ellas las proposiciones lógicas.

Un símbolo como "φx" es excelente cuando se trata de expresar relaciones lógicas sencillas. Ese símbolo procede del caso en que "φ" representa un predicado y "x" un sustantivo variable. Pero en cuanto se pasa a considerar los verdaderos hechos atómicos, se ve que este simbolismo está en gran desventaja frente al lenguaje real. Es totalmente erróneo hablar de *una* forma sujeto-predicado. En realidad no hay *una*, sino muchas. Si sólo existiera una, se podrían sustituir mutuamente todos los substantivos y adjetivos, pues todas las palabras capaces de sustitución mutua pertenecen a la misma clase.[1] Pero el propio lenguaje corriente nos muestra que no es así. Aparentemente puedo decir: "la silla es marrón" y "la superfi-

---

1] El lenguaje está perfectamente ordenado. Lo difícil es convertir la sintaxis en algo sencillo y claro.

[6] Ideas semejantes se indican muchas veces en ***PhB***, a menudo como algo marginado (*v. gr.*, págs. 51 y 84), otra veces se les da diverso grado de asentimiento (págs. 58, 88, 100, 103, 158, 168 y 267). Sin duda, Wittgenstein se refiere aquí a anteriores manuscritos en que aparecían por primera vez algunos de los lugares de ***PhB***.

cie de la silla es marrón"; pero si sustituyo "marrón" por "duro", sólo podré expresar la primera proposición, mas no la segunda. Esto nos muestra que también la palabra "marrón" ha tenido dos significados diversos.

"Derecha" aparece a primera vista como los demás adjetivos, por ejemplo "dulce". "Derecha-izquierda" corresponde a "dulce-amargo". Puedo decir "más a la derecha", lo mismo que "más dulce"; pero sólo puedo decir: "...está a la derecha de...", mas no: "...está a lo dulce de...". Incluso la misma sintaxis de estas palabras es diferente.[1]

Si ahora no se considera una proposición aislada en que aparece determinada palabra, sino todas las proposiciones posibles, éstas expresan más completamente la sintaxis de la palabra, mucho más completamente que el símbolo "φx".

Hay algo digno de atención en nuestro lenguaje que podría comparar a una *rueda suelta* de una máquina. Voy a explicar inmediatamente qué quiero decir.

El sentido de la proposición es su verificación

Por ejemplo, si digo: "Arriba, en el arcón, hay un libro", ¿cómo me las compondré para comprobarlo? ¿Me bastará con ir a verlo, o con mirarlo y remirarlo, o con tomarlo en la mano, abrirlo, hojearlo, etc.? Aquí hay dos puntos de vista.

Uno dice: Empiece por donde empiece, nunca podré comprobar íntegramente la proposición. La proposición tiene siempre una puerta secreta; hagamos lo que hagamos, nunca podremos estar seguros de que no nos hemos engañado.

El otro punto de vista, del que soy partidario, dice: No; si no puedo comprobar completamente el sentido de la proposición, entonces quiere decir que no he podido indicar nada con la proposición; luego la proposición no ha dicho nada.

Para poder determinar el sentido de la proposición, debería poseer una experiencia muy definida si quiero que la proposición pase por comprobada. Aquí vacila mucho el lenguaje corriente; mucho más que el lenguaje científico. Reina en esto cierta libertad que no se debe a otra cosa sino a que los símbolos de nuestro lenguaje no han sido definidos inequívocamente.

1] En dulce no interviene ningún número. Puedo decir: Este té es más dulce que el otro, sin que en esta afirmación haya tenido que pensar en números.

[Las palabras fluctúan entre diversos significados, y por eso no se sabe cuándo se ha comprobado completamente una proposición. Si de una vez por todas determináramos el significado, habríamos logrado un criterio seguro sobre la verdad de una aserción.]

Muchas veces la verificación es muy difícil, *v. gr.*: "Seitz ha sido elegido alcalde".[7] ¿Por dónde debo empezar para comprobar debidamente esa proposición? ¿Consiste el método auténtico en ir e informarme? ¿Debo acudir a las personas que asistieron al acto? Unas lo habrán visto desde el frente; otras por detrás. ¿Debo mirar en el periódico?

Lo que más confunde en nuestro lenguaje al observador filósofo es la diferencia entre *ser* y *parecer*.

Ruedas sueltas

Si me volteo, desaparece la estufa. (Las cosas no existen en los intervalos de la percepción.) Cuando se toma "existencia" en sentido empírico (no en el metafísico), la expresión anterior se convierte en una rueda suelta. Nuestro lenguaje está perfectamente bien mientras entendamos su sintaxis y reconozcamos las ruedas sueltas.

"*Sólo* me puedo acordar" ...como si hubiera otro medio y no fuera el recuerdo la *única* fuente de donde bebemos.

La gente imagina el recuerdo como una estampa.[7a] Yo puedo comparar la estampa con el original, pero no el recuerdo. Las vivencias del pasado no son por cierto como los objetos del cuarto contiguo que ahora no veo, pero puedo ir a verlos. ¿Puedo ir a ver el pasado?

[["*No puedo sentir el dolor de usted*"]]

Sé por experiencia qué depende de mi voluntad y cuáles son las partes de mi cuerpo. Sé por experiencia, pongamos por caso, que nunca he tenido dos cuerpos. Pero ¿sé por experiencia que no puedo sentir el dolor que usted siente? ¡No!

"No puedo sentir dolor en su diente."

"No puedo sentir su dolor de dientes."

La primera proposición tiene sentido, pues expresa un conocimiento empírico. A la pregunta: ¿Dónde duele?, señalaría su

[7] Karl Seitz fue alcalde socialista de Viena, desde 1925 a 1934.

[7a] Comparar: *PhB*, págs. 81 *s.*, y abajo, págs. 47 *s.*

diente. En cuanto le tocaran el diente, yo me estremecería. En otras palabras, sería mi dolor, y seguiría siéndolo aunque usted mostrara los síntomas del dolor en ese lugar, incluso aunque se estremeciera como yo cuando alguien presionara sobre el diente.

La segunda proposición es puro sinsentido. Semejante proposición queda prohibida por la sintaxis.

La palabra "yo" pertenece a aquellos términos que se podrían eliminar del lenguaje. Es muy importante poseer varios idiomas, porque se puede ver qué tienen de común esas lenguas y qué constituye ese común.[8]

Se pueden construir muchos idiomas en que cada vez fuera un hombre diferente su punto medio. Imagínense que es un déspota oriental y que todos sus súbditos quedaran obligados a hablar en un idioma en que usted fuera el centro.[8a] Si yo hablara en ese idioma, diría: Wittgenstein tiene dolor de dientes; pero Waismann se comporta como Wittgenstein cuando tiene dolor de dientes. En el idioma en que fuera usted el punto medio, se diría por el contrario: Waismann tiene dolor de dientes; Wittgenstein se comporta como Waismann cuando tiene dolor de dientes.

Todos estos idiomas se dejan traducir recíprocamente. Sólo lo que es común refleja algo.

Es digno de señalarse que *uno* de esos idiomas es preeminente; a saber, aquél en que en cierto modo puedo decir: siento dolor *real*.

Si yo soy "A",[1] puedo decir: "B se comporta como A, cuando siente dolores", y también: "A se comporta como B, cuando

---

1] Cuando A tiene dolor de dientes, puede decir: Ahora me duele el diente, y ésta es la conclusión de la verificación. B, por el contrario, debería decir: A tiene dolores de diente, pero esa proposición no es el fin de la verificación. Aquí está el punto donde aparece distintamente la peculiaridad de los distintos lenguajes.

[8] Comparar: *TLP*, 5,512. "~p" es verdadero si "p" es falso. Por consiguiente, si la proposición "~p" es verdadera, "p" es falsa. ¿Cómo puede hacerla concordar con la realidad el rasgo "~"?

Lo que se ha negado en "~p" no es "~", sino todo aquello que es común a todos los signos de esta notación que niegan a "p".

De donde la regla general según la cual se forman: "~p", "~~~p", "~pV~p", "~p.~p", etc., etc. *(ad infinitum)*. Este conjunto de cosas comunes es lo que refleja la negación.

[8a] Comparar: *PhB*, págs. 88 *s*.

siente dolores". Uno de estos idiomas es preeminente, precisamente aquél en que yo soy el punto medio. La peculiaridad de ese lenguaje se basa en su empleo y no viene expresada.

(LENGUAJE Y MUNDO)

Película sonora

Voy a emplear un viejo símil: "la linterna mágica". No es la *banda sonora* la que acompaña a la película, sino la música.

La banda sonora acompaña a los fotogramas.

La música acompaña a la película.

Fotogramas	Banda sonora	Música	Película
?	?	Lenguaje	Mundo

El lenguaje acompaña al mundo.[9]

Miércoles, 25 de diciembre (con Schlick)

"TODOS" II

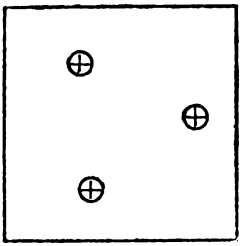
WAISMANN pregunta: ¿Cómo se puede representar la proposición: "Todos los hombres de esta habitación llevan pantalones?" ¿Quizás así?:

$$fa \,.\, fb \,.\, fc \,.\, \sim fx \,.\, (x \neq a, \neq b, \neq c)$$

WITTGENSTEIN: No.

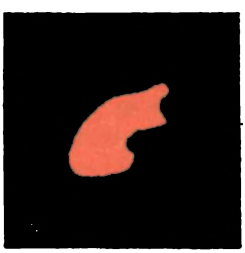
Supongamos el caso: "Todos los círculos de este cuadrado tienen una crucecita."

[9] Después de esta indicación hay 2 páginas y 2/3 en blanco. Véase el "Prefacio de la edición alemana", pág. 25.



La dificultad para formular la proposición se asienta en la denominación. Con los nombres propios sucede una cosa endiablada. Por ejemplo, si quiero nombrar la silla de Jacob. ¿A quién le he dado propiamente el nombre? ¿A la forma o a la silla? Si hubiera más de mil sillas iguales a las de Jacob, ¿cómo sabría cuál es la de Jacob? Si al nombrar a Jacob he nombrado también la *forma* de la silla, no podré distinguir al uno de la otra. Si dijera que podría distinguirla señalándola, se me puede presentar otra dificultad. Si dos sillas exactamente iguales se juntaran una contra otra, se penetraran y luego se separaran de nuevo, ¿cómo sabría cuál es la de Jacob? La posibilidad de dar a las cosas nombres propios plantea experiencias muy complicadas. (¡Impenetrabilidad!)

¡Volvamos a los círculos! Desde luego, aquí esquivamos la dificultad de los nombres propios. Describiremos los contornos; esto es: las *lindes cromáticas del campo visual.* Semejante descripción es siempre completa, por lo que puedo decir: aquí



tenemos *una figura completa* del hecho atómico. Ya no podemos añadir posteriormente nada con una "y"; el espacio está completo. Puedo alterar la descripción, pero no añadir nada. Si describo una habitación y digo dónde se hallan los sillones y la mesa y cuanto haya, no podré decir al cabo de media hora: y también hay esto y esto.

1. *El círculo que hay en el cuadrado:*

Dato del cuadrado
Dato del punto medio del círculo } figura completa
Dato del radio del círculo

Ahora podemos formarnos una figura más general del hecho atómico.

2. *Un círculo en el cuadrado:* Dato del cuadrado

$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$
$O<x_0<a$
$O<y_0<a$ } figura incompleta
$r<$menos $([[x_0,y_0]]$
$a-x_0, a-y_0)$

3. *Tres círculos en el cuadrado:* Igualmente. Dato de los tres círculos por variables.

4. *Todos los círculos que hay en el cuadrado:* Puedo pasar de una tal forma proposicional a otra. La siguiente proposición no resulta de la anterior por "y", sino [[por]] op[[eraciones]] en la forma proposicional.

Ahora puedo contemplar la serie de proposiciones: 1 círculo en el cuadrado, 2 círculos en el cuadrado, 3 círculos en el cuadrado,...*n* círculos en el cuadrado. *Inducción completa* para esta serie de proposiciones.

El "todos" es también el *"todos"* de la aritmética, lo que equivale a la inducción completa.

"Todos los círculos que hay en el cuadrado son negros." Igualmente.

Tiempo

Todas las dificultades de la física proceden de que sus asertos se confunden con los de la gramática.

"Tiempo" tiene dos sentidos diferentes:

a) Tiempo del recuerdo
b) Tiempo de la física

Donde caben distintas verificaciones, caben también distintos significados. Cuando puedo verificar exclusivamente por la

memoria determinado dato temporal —por ejemplo, que esto y aquello sucedieron antes que eso y aquello otro—, el "tiempo" ha de tener diverso significado que cuando puedo comprobar ese dato por otros medios, *v. gr.*, consultando un documento o preguntando a alguien, etc. (Dígase lo mismo de la "representación". Ordinariamente, se llama representación a la "imagen" del objeto, como si hubiera otro medio al lado de la representación para llegar al objeto. La representación tiene un significado si la tomo como imagen de un objeto, que puedo comprobar por otra manera, y otro significado cuando contemplo el objeto como construcción lógica de representaciones.) [9a]

Asimismo, se ha de distinguir el recuerdo como *fuente*, del recuerdo que puede verificarse por otro medio.

Decimos: Tengo sólo un *pálido* recuerdo. ¿A qué viene aquí el *sólo*? ¿Puedo acaso comparar el recuerdo con el objeto, como una fotografía con el original? ¿Hay, pues, además del recuerdo otro medio para llegar al hecho atómico?

Símil de la película: Diversas imágenes de distinta nitidez. Las podemos especificar según esa nitidez. El descolorido de la imagen *sería* el "tiempo".

Ahora bien, el tiempo qué es, ¿externo o interno?

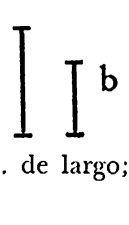
Externo — interno

En toda la cuestión sobre lo externo y lo interno reina enorme confusión, debido a que puedo describir un hecho atómico desemejante de varias maneras.

Externo es una relación que dice "¿cómo?" Se expresa en una proposición.

Interno: Tenemos dos proposiciones entre las que existe relación formal.

Parece como si los hechos atómicos semejantes se pudieran expresar ora mediante una proposición, ora mediante dos, entre las que hubiera relación interna. *V. gr.:*



Puedo decir: a mide 2 m. de largo; b, 1.5 m. Así se ve que a es más largo que b.

[9a] Comparar con *PhB*, págs. 81 *s.*, y arriba, pág. 43.

Pero lo que no puedo decir es que $2>1.5$. Esto es algo interno. Puedo también decir: a es un 0.5 más largo que b.

Aquí tengo claramente una relación externa, pues es fácilmente pensable que la línea a es más corta que la b. Todavía más claro: No puedo imaginar cuál de las dos líneas sea más larga o más corta, hasta que —por ejemplo— establezca la relación que me comunica que la línea de la izquierda es más larga que la de la derecha. Esto es algo externo. Todo proviene, pues, de que poseemos una imagen incompleta de la situación. Si describiéramos completamente el hecho atómico, desaparecería la relación externa. No debemos creer que entonces quedaría sobrando una relación. Aparte de las relaciones internas entre las formas —relaciones que siempre existen—, no debe aparecer en la descripción ninguna otra, lo que muestra en verdad que la *forma de relación* no es algo esencial: la forma de relación no figura.

Puedo muy bien decir: Este traje es más obscuro que el otro. Mas no: Este color es más oscuro que aquel otro; pues esto pertenece a la esencia del color, y éste no puede ser pensado sin esa esencia.

Siempre es la misma cosa: En este y aquel lugar del espacio hay un color más oscuro que en ese otro lugar. En cuanto saco a relucir el espacio, tengo relaciones externas; pero entre las cualidades cromáticas puras solamente pueden existir relaciones internas. No poseo otro medio de caracterizar los colores sino a través de sus cualidades.

Empleo con referencia al tiempo: César, anterior a Augusto: externo. Es un hecho histórico también pensable de otra manera. Si lo que ocurrió antes sólo lo puedo verificar al través del recuerdo, la relación "antes que" es interna.

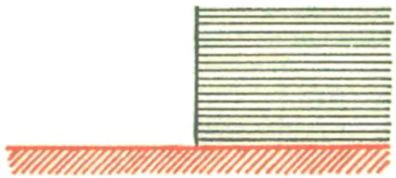
El espacio visual

A todos nos consta que el espacio visual tiene cierta correspondencia con el espacio euclídeo. Pero, ¿en qué consiste esa correspondencia? El espacio visual no es el espacio euclídeo, sino que solamente se corresponden mutuamente. El espacio euclídeo es el correlato del espacio visual. ¿De qué tipo es esa correspondencia?[1]

1] Se presenta aquí un peculiar *factor de indeterminación* que falta en la geometría euclídea. La geometría del espacio visual

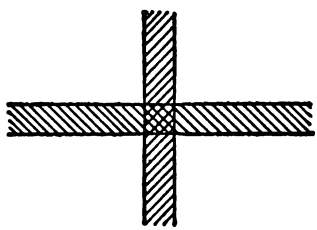
Fenómeno curioso: Yo puedo ver las lindes solamente en el espacio visual; es decir, las lindes entre los diversos colores. Pero si me fijo en otra cosa totalmente distinta, en una estrella con su color, veré que la estrella no es extensa; no tiene lindes. No se puede preguntar: ¿es redonda o cuadrangular? No posee contornos. Esto quizás nos quiera decir que no estamos saliendo de la geometría euclídea.

La línea es el límite de dos planos, y el punto es la incidencia de dos líneas.



Este ángulo es un punto. La estrella es un punto en sentido totalmente diverso.

¿Cómo vemos el punto de incidencia de dos rectas trazadas con un lápiz? + ¿cómo un ángulo recto? Sabemos que sí es un ángulo recto, pero no lo vemos. Lo que vemos carece de contorno.



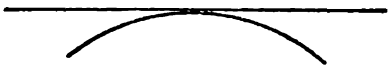
Hjelmslev[10] ha hecho experimentos en este sentido, pero sin comprender el auténtico significado del asunto. En primer lugar, no acaba de ver en qué está propiamente el problema: ¿En las propiedades de los cuerpos lígneos que empleamos

se establece a partir de la geometría euclídea; esto es, a partir de una determinada sintaxis, más la sintaxis de ese factor de indeterminación.

10 J. Hjelmslev, en *Abhandlungen aus dem math. Sem. d. Univ. Hamburg*. 2, 1923, págs. 1-36; especialmente pág. 28, y en *Acta Mathematica* 40, 1916, págs. 35-66.

como instrumentos de dibujo, etc., o en las propiedades del espacio visual?[1]

Lo primero sería inesencial; sería solamente una descripción sin importancia de las propiedades de la madera. Nuestra pregunta, pues, se refiere a otra cosa, a saber: dibuje como dibuje una circunferencia y su tangente, me han de *aparecer* siempre como poseyendo un punto en común.



Pero si en realidad no tienen nada en común, sino que la recta corre muy *cerca* de la circunferencia, al alejarnos un poco tenemos la impresión de que coinciden en un trozo. Este fenómeno del campo visual es lo esencial y no las propiedades de los instrumentos de dibujo.

Aquí se trata de definir qué se describe en el lenguaje común con la palabra *inexacto,* ¿Cómo podríamos representar ese término simbólicamente y cuáles serían las reglas de su sintaxis?

F. Klein [11] ha traído a colación el punto de vista del umbral.[2] Pero, con todo, no ha logrado expresar la cuestión correctamente.

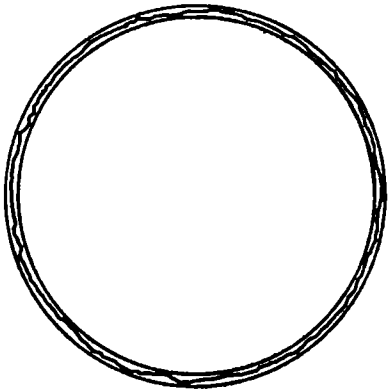
Cuando se dice, por ejemplo: "Todas las figuras representadas dentro de un espacio circular de determinada sutilidad, las

---

1] Hjelmslev se propone partir de una geometría basta. Pero es un error creer que una geometría basta sea lo mismo que una geometría sutil. (Ambas tienen la misma multiplicidad.) Hjelmslev, por ejemplo, no considera el punto sino la *mancha;* ahora bien, la mancha, que es extensa, tiene contornos; no así el punto.

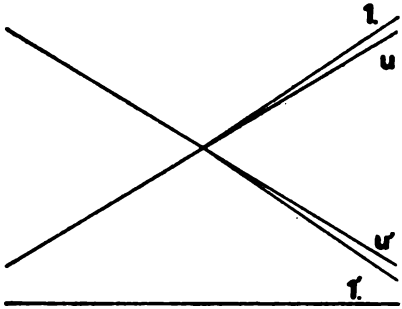
2] En el umbral hay algo que nos llama la atención. Sabemos que podemos distinguir inmediatamente un cuadrado regular de un pentágono regular, pero no un polígono regular de 200 ángulos de otro de 201 ángulos. Por consiguiente, cuando pasamos revista a polígonos de 4, 5, 6... ángulos, debe de haber un momento a partir del cual nos confudamos al contar. De modo semejante, podemos decir que llega un momento en que no distinguimos el polígono circunscrito, de la circunferencia en él inscrita.

11 *Elementarmathematik von einem höheren Standpunkte* III, Berlín, 1928, págs. 2 *ss.*



vemos como circunferencias", ¿quiere decir que estamos dando los límites inferior y superior, esto es, las dos circunferencias? No; este dato no tiene la multiplicidad de la apariencia que hemos de describir, pues lo que debo distinguir propiamente son las dos circunferencias límites.

Pensemos en este problema: Debemos determinar si dos líneas rectas son paralelas. A este efecto, trazamos una recta en distintas posiciones; así podremos determinar, luego de haber realizado cierto número de intentos, cuál fue la última posición que hemos considerado todavía como paralela, y cuál la primera posición que ya no consideramos como paralela. Estas dos posiciones tienen que ser distintas entre sí. Lo esencial es saber que proseguir en los intentos no alterará nada.



Con la multiplicación del número de intentos disminuye la diferencia de las dos posiciones, pero jamás llegará a cero. De aquí se pueden deducir dos interpretaciones posibles:

a) Todas las rectas entre u u′ nos aparecen como paralelas, y las de más allá de u u′ como no-paralelas.[1]

b) Todas las rectas exteriores a l. l′. las vemos como no-paralelas; todas las interiores a l. l′., como paralelas.[11a]

Una de estas dos interpretaciones tiene que ser posible, pues de lo contrario no habría límite entre la clase de las paralelas y la de las no-paralelas, lo que iría (Corte de Dedekind [12] *)

1] *Suplemento, 30 de diciembre de 1929*

Debo aclarar mi explicación. Lo esencial en todo esto es que empleamos dos lenguajes. El lenguaje del espacio visual y el del espacio euclídeo, dando preeminencia a éste sobre aquél. Al hablar, ya hacemos distinción entre "ser" y "parecer", y solemos decir que dos líneas del espacio visual pueden *parecer* iguales y no *serlo;* o bien, que un arco pequeño puede *parecer* rectilíneo, aunque no lo *sea,* etc.

En esto se manifiesta la estructura no euclídea del espacio visual.

Ahora bien, la verdad acerca del problema de las paralelas es la siguiente:

11a En el diagrama "l" equivale a "primero" y "u" a "último".

12 Dedekind demuestra: "Si el sistema R de todos los números reales se divide en 2 clases A_1, A_2, de modo que cada número α_1 de la clase A_1 es más pequeño que cada número α_2 de la clase A_2, entonces existe uno y un solo número α, a partir del cual se produce dicha división" (*Stetigkeit und irrationale Zahlen,* Braunschweig, 1912, pág. 18). Análogamente, afirma Wittgenstein que a cada extremo del abanico de líneas paralelas, sólo hay *una* línea que separa las paralelas de las no paralelas. Así ha de ser *si* es cierto lo que dice Dedekind.

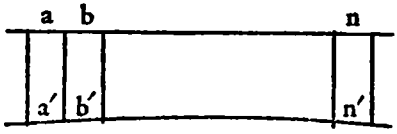
* Corte de Dedekind: División del conjunto de los números racionales en dos clases por un separador que no es miembro del conjunto. Es una separación de *segundo tipo* que permite extender el concepto de número hasta los números irracionales y produce el concepto de la continuidad de los números reales.

(El separador de segundo tipo no pertenece al conjunto. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ separa los números racionales en dos clases: A{ $x \leq 0$ y $x^2 < 2$} y B{ $x^2 > 2$})

(Extraído de T. Alaric Millington: *Dictionary of Mathematics,* Carrell, Londres, 1966.) [T.]

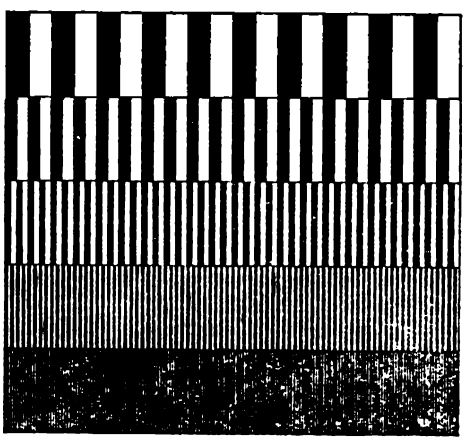
contra la esencia de la continuidad. No se puede decir, por tanto: Hay tres clases: paralelas, no-paralelas y dudosas. Las líneas de la tercera clase no las vemos.

De todas formas, es claro que la apariencia *no* puede describirse dando dos límites como l. y u, sino fijando convencionalmente una línea como límite. Esto es lo esencial en todas estas cosas: Si la descripción ha de tener la debida multiplicidad de la apariencia, sólo debe aparecer *una línea* límite.



Vemos a||a′, b||b′, ...n||n′. De aquí sólo podemos concluir que la palabra "paralelo" significa en el campo visual algo diverso (tiene otra sintaxis) que en el espacio euclídeo. Dígase lo mismo de los términos "igual", "recto", "curvo", "circunferencia", "tangente", y así sucesivamente. Al decir que la circunferencia y la tangente del campo visual tienen un trozo en común, implicamos que la circunferencia del campo visual y la tangente del campo visual tienen sintaxis diferentes que sus análogas del espacio euclídeo. Para formar el hecho atómico del campo visual en lenguaje de la geometría euclídea necesitamos un método de proyección que consiste en el empleo de la palabra "parece".

Para expresar la relación "la igualdad" del espacio visual en términos del espacio euclídeo necesitaremos una relación em-



El campo visual a menudo esconde en sí cuestiones no resueltas. Por ejemplo, ¿cómo se puede entender que el campo visual cese? El campo visual no tiene fronteras y no puede tropezar con algo; no podemos ver, por tanto, sus límites. Definitivamente, no tiene limitaciones y, sin embargo, no es una esfera. Por ejemplo, ¿puede alguien ver cómo algo entra en el campo visual? No; pero ¿cómo sería el simbolismo que describiera esto?

La geometría como sintaxis II

La relación propiamente existente entre geometría de precisión y geometría de aproximación [12a] se puede expresar del siguiente modo: Supuesto que hubiéramos encontrado diversos valores para la relación del radio y el diámetro, mediante distintas medidas con circunferencias de diferente valor, ¿podríamos decir que habíamos encerrado el número π en distintos intervalos? [¿Podríamos suponer que habíamos medido π en el mismo sentido como se miden las constantes físicas?] Desde luego que no. Si por casualidad todos los intervalos hubieran sido demasiado grandes, por ningún motivo deberíamos suponer que π tenía un valor mayor, sino que tendríamos que confesar que nos habíamos equivocado. Este es propiamente el significado

---

parentada con aquélla (¡pero no idéntica!); por ejemplo, la siguiente:

$$a \equiv b, \text{ si } b = a + \varepsilon, |\varepsilon| < \frac{a}{100}$$

"$a \equiv b$, $b \equiv c \rightarrow a \equiv c$" pueden valer o no.

Por todo esto, la geometría del espacio visual tiene otra multiplicidad que la geometría del espacio euclídeo, y no podemos sustituir en modo alguno "igual" por "igual", "paralelo" por "paralelo", "recto" por "recto".

A partir de determinado lugar, *gris*. ¿Significa esto que el campo visual es divisible indefinidamente? ¿O significa lo contrario? Sólo indica en realidad: Cuando en la geometría del espacio euclídeo se emplea "estar dividido", en la geometría del espacio visual debe corresponder el fenómeno *gris*. Puede bien ser que a la división del espacio euclídeo corresponda una división en el espacio visual, pero a lo mejor es totalmente distinta. Es indiferente lo que yo haga en el espacio euclídeo.

12a Expresiones tomadas de la obra ya citada de F. Klein.

del número π: Ninguna medida nos puede decir qué valor tiene π o entre qué valores está; antes bien, que el número π es la *medida* según la cual juzgamos del valor de una medición.[1] La medida se nos da ya antes de la medición; por esto no puedo alterar la medición. Cuando decimos: π tiene este valor: π = 3,14159265... no significa que estamos afirmando algo acerca de las mediciones reales, sino solamente que estamos conviniendo sobre cuándo una medición puede considerarse acertada y cuándo no. Los axiomas de la geometría tienen también el carácter de convencionalismos sobre el lenguaje en que queremos describir los objetos espaciales. Son reglas de sintaxis. Las reglas de sintaxis no tratan de nada, sino que solamente las formulamos.

Sólo podemos postular lo que hacemos.

Sólo podemos postular reglas conforme a las cuales queramos hablar. No podemos postular hechos atómicos.

A primera vista puede parecer como si los axiomas de la geometría nos quisieran comunicar algo. Por ejemplo, ¿no es una comunicación la proposición que dice: La suma de los ángulos del triángulo equivale a 180°? ¿No puede ser verdadera o falsa? ¿Cómo la pura sintaxis puede enseñarnos algo semejante? Supongamos que hubiéramos obtenido una medición de 190°. ¿Qué diríamos? Que habíamos cometido un error. La proposición: La suma de los ángulos de un triángulo equivale a 180° tiene, por consiguiente, sólo el valor de diferenciar los métodos correctos de medición de ángulos, de los incorrectos. Nunca puede esa proposición decirnos algo acerca del hecho atómico. Esto nos muestra que en geometría jamás nos las habemos con la realidad, sino con las posibilidades existentes en el espacio.

Los descubrimientos acerca del espacio son descubrimientos sobre lo que existe en el espacio.

En matemáticas no existe el todavía.

En matemáticas es tan imposible descubrir algo como en la gramática.

La sintaxis del conjunto de las cosas es geometría, más física.

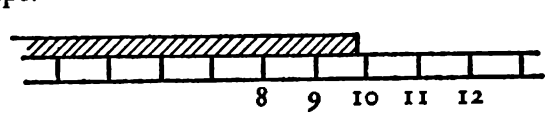
1] No podemos medir el número π, porque con el número π *con*mensuramos la exactitud de la observación.

La física determina regularidades, y no atiende a lo que es posible.

Por esto, aunque esté totalmente desarrollada, la física no da descripciones de la estructura de los hechos atómicos fenomenológicos. En la fenomenología se trata siempre de la posibilidad; esto es, del sentido, no de la verdad o falsedad. La física simplemente extrae ciertos lugares del continuo y los emplea para formar una serie regular; de lo demás no se ocupa.

SISTEMA CROMÁTICO

Escribí una vez: La proposición es como una regla aplicada a la realidad. Sólo los puntos exteriores de la regla graduada tocan el objeto que se ha de medir.[13] Ahora diría más bien: Un *sistema proposicional* es como una regla aplicada a la realidad. Con esto quiero indicar lo siguiente: Cuando aplico una escala a un objeto espacial, aplico *todas las divisiones* al mismo tiempo.



No se aplican sólo las divisiones individualmente, sino toda la regla. Una vez que sé que el objeto llega hasta la división 10, inmediatamente deduzco que no alcanza hasta la 11, 12, etc. Las aserciones que me describen la longitud de un objeto constituyen un sistema, un sistema proposicional. Tal sistema es el que ahora se cotejará con la realidad y no una sola proposición.

Cuando, por ejemplo, digo: Tal punto del campo visual es *azul,* con eso sé también que el punto no es verde, ni rojo, ni amarillo, etc. En un momento he aplicado toda la *escala cro-*

[13] *TLP* 2,1512 — 2,15121. La primera proposición tiene *es* (ello) como sujeto, referido a *das Bild* (la figura), neutro en alemán, sujeto de la proposición anterior. La segunda proposición empieza con: "Sólo los puntos exteriores de la regla graduada *tocan*..."

mática. Por esto un punto no puede tener diversos colores al mismo tiempo. Cuando, pues, aplico un *sistema* proposicional a la realidad, sé —al igual como sucede con lo espacial— que solamente puede haber un hecho atómico y no más.

Todo esto no lo sabía cuando compuse mi trabajo; a la sazón creía que toda inferencia se reducía a un tipo de tautología. Entonces no había captado todavía que la inferencia podía tener también la forma: Un hombre tiene 2 metros de alto; luego no tiene 3 metros de alto. Ello se debía a que creía que las proposiciones elementales tenían que ser independientes, y que de la existencia de un hecho atómico no se podía inferir la no-existencia de otro.[14] Cuando, pues, mi concepto actual está de acuerdo con el sistema proposicional, es legítimo que de la existencia de un hecho atómico infiera la no-existencia de los demás que se describen en el sistema proposicional.

¿Pertenece cada proposición a un sistema? I

El profesor SCHLICK pregunta: ¿Cómo puedo *saber* yo que una sintaxis es correcta y otra no? ¿No se puede ir a buscar un fundamento más profundo de por qué "fx" sólo es verdadero para un valor de "x"? ¿De dónde sabemos esto? ¿Cómo se relaciona el conocimiento empírico con la sintaxis?

WITTGENSTEIN responde que existe una experiencia del *que* (dass), y otra experiencia del *como* (wie).

SCHLICK: ¿Cómo se relaciona, por ejemplo, con la llamada *ley de la relatividad* de la psicología (Hamilton) [15] el que solamente lleguemos a la apercepción de una sensación por contraste? Nosotros no oímos la armonía de las esferas porque la estamos escuchando ininterrumpidamente.

WITTGENSTEIN: Aquí tenemos que andar otra vez con distingos. ¿Qué quiere decir que *oímos* la armonía de las esferas? Si quiere indicarse acaso que la podríamos comprobar por otro modo distinto del oír, entonces la proposición ya no tiene

14 *TLP* 2,062, 4,211, 5,134-5,135.

15 Propiamente debería haber citado a A. Bain, quien propone como ejemplo de su ley fundamental de la relatividad (en *The Senses and the Intellect,* Londres 1864): "If we had never been affected by any colour except red, colour would never have been recognized by us." ("Si nunca nos hubiera afectado ningún otro color, excepto el rojo, no hubiéramos podido distinguir color alguno.") (Comparar más abajo.) La ley de la relatividad de Hamilton tiene un sentido totalmente distinto que no cuadra aquí.

significado fenomenológico, sino de otro tipo, quizás físico (vibración del aire). Si se quiere designar algo que *solamente* se puede comprobar *oyéndolo,* entonces se tendría que decir: Deberíamos oír algo, pero no lo oímos. Esta proposición no se puede verificar en modo alguno y, por consiguiente, carece de sentido. Rueda suelta.[16]

[[*El mundo es rojo I*]]

SCHLICK: Usted dice que los colores constituyen un sistema. ¿Indica con esto algo lógico o algo empírico? ¿Qué le sucedería, *v. gr.,* a un individuo que se hubiera pasado la vida encerrado en una habitación roja sin ver más que cosas de color rojo? O bien, si alguien no tuviera en todo el campo visual otra cosa que un color rojo de la misma tonalidad? ¿Podría decir: Sólo veo color rojo pero tiene que haber otros colores?

WITTGENSTEIN: Cuando alguien no ha salido jamás de su aposento, sabe sin embargo que el espacio sigue; es decir, que existe la posibilidad de salir de la habitación (aunque ésta tuviera paredes diamantinas). Esto no es una experiencia, con todo; pero va involucrado en la sintaxis de la habitación, a priori.

Ahora, ¿tiene sentido la pregunta acerca de cuántos colores se han debido percibir para conocer el *sistema* cromático? ¡No! (Parejamente, pensar un color no quiere decir alucinarse con ese color.) Aquí existen dos posibilidades:

a) O su sintaxis es igual que la nuestra: rojo, más rojo, rojo brillante, rojigualda, etc. En el cual caso poseerá nuestro sistema cromático.

b) O bien, su sintaxis no es la misma. Entonces no conoce siquiera un color según nuestro sentido. Luego, cuando un signo tiene el mismo significado, tiene que poseer también la misma sintaxis.[1] Esto no depende de la cantidad de colores

---

1] *Suplemento, lunes 30 de diciembre de 1929*

Me he expresado mal al exponer así la cosa. No se puede decir nada ni en el caso de que alguien sólo conozca el rojo, ni cuando conoce diversos matices del mismo color. Daré un sencillo contraejemplo, que es muy viejo: ¿Qué pasa con los

16 Comparar más arriba, págs. 42 y 43.

vistos, sino de la sintaxis. (Lo mismo que depende de la "cantidad espacio".)

Anti-Husserl

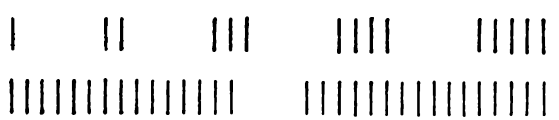
Schlick: ¿Qué se le puede replicar a un filósofo que dice que las afirmaciones de la fenomenología son juicios sintéticos *a priori*?

Wittgenstein: Cuando digo: "No tengo dolores de estómago", presupongo con eso la posibilidad de una situación de dolor en el estómago. Mi estado actual y el de dolor de estómago pertenecen por igual al mismo espacio lógico. (Lo mismo que cuando digo: "No tengo dinero", dicha aserción supone la posibilidad de que alguna vez lo tenga; en realidad muestra el punto cero del espacio monetario.) La proposición negativa presupone la positiva y viceversa.

Tomemos ahora la afirmación: "Un objeto no es rojo y verde al mismo tiempo".[16a] ¿Indico con eso simplemente que hasta ahora no he visto tal objeto? Claramente no. Más bien quiero decir: "No *puedo* ver semejante objeto", "Lo rojo y lo verde no *pueden* coincidir en un mismo lugar". Y ahora preguntaría yo: ¿Qué significa aquí la palabra *"poder"*? La palabra "po-

---

números que *veo* en la regla graduada? Podría inferir: Si veo 1, 2, 3, 4, 5 divisiones y las divisiones vistas tienen la misma sintaxis que las contadas, entonces estará en mi mano poder *ver* más divisiones. Pero no sucede así.



Viendo puedo distinguir 2 de 3 divisiones, pero no 100 de 101. Se dan aquí dos verificaciones distintas; una que consiste en ver, y otra que consiste en contar. Un sistema tiene una multiplicidad diferente de la del otro. El sistema visual viene a decir: 1, 2, 3, 4, 5, *muchas más.*

16a En su *Allgemeinen Erkenntnislehre,* Berlín, 1925, cita Schlick a este respecto a E. Husserl, *Logische Untersuchungen* II, 2, [[Halle, 1922]], página 203.

der" es, sin lugar a dudas, un concepto gramatical (lógico), no cósico.

Supongamos ahora que la afirmación: "Un objeto no puede ser rojo y verde", fuera un juicio sintético, y que las palabras "no puede" significaran la imposibilidad lógica. Puesto que una proposición es la negación de su negación, debe también existir la proposición: "Un objeto puede ser rojo y verde". Esta proposición sería, asimismo, sintética. Como proposición sintética tendría sentido que indicaría que el estado de cosas por ella significado podría *existir.* Si "no poder" indica la imposibilidad *lógica,* llegamos a la consecuencia de que lo imposible puede ser.

Aquí le quedaría a Husserl solamente una salida: decir que existe todavía una tercera posibilidad. A lo que respondería yo: Es fácil inventar palabras, pero con ellas no puedo pensar nada.

Lunes, 30 de diciembre de 1929 (con Schlick)

A Heidegger

Puedo muy bien imaginar qué quiere decir Heidegger con su ser y angustia.[17] El hombre tiene la tendencia a correr contra las barreras del lenguaje. Piensen por ejemplo en el asombro que causa saber que algo existe. El asombro no se puede expresar en forma de pregunta, ni tampoco hay respuesta para él. Cuanto podamos decir, podemos a priori considerarlo como sinsentido. A pesar de todo, corremos contra las barreras del lenguaje.[1] Esta corrida la vio ya Kierkegaard y la caracterizó

1] Lo místico es el sentimiento del mundo como totalidad delimitada.[17a] "A mí no me puede pasar nada", significa: Lo que me pueda ocurrir me tiene sin cuidado.[17b]

17 M. Heidegger, *El ser y el tiempo,* Fondo de Cultura Económica, México, D. F., 1971, pág. 206: *"El 'ante qué' de la angustia es el 'ser en el mundo' en cuanto tal.* ¿Cómo se distingue fenomenológicamente aquello ante que se angustia la angustia, de aquello ante que se atemoriza el temor? El 'ante qué' de la angustia no es ningún ente intramundano... *el 'ante qué' es el mundo como tal."*

17a Comparar: *TLP* 6,45

17b Comparar: *LE,* pág. 8.

con gran similitud (como corrida contra la paradoja).[18] Esta corrida contra las barreras del lenguaje es la *ética*. Considero importante que se ponga fin a tanta charlatanería sobre la ética —que si existe un conocimiento, que si existen los valores, que si se puede definir el bien, etc.—. En la ética siempre se intenta decir algo que no concierne ni puede concernir a la esencia del asunto. A priori es cierto que cuanto se quiera dar como definición de bien, será siempre una equivocación; lo que propiamente se quiere indicar corresponde a la expresión (Moore).[19] Pero la tendencia, el correr contra, *señala a algo*. Esto ya lo sabía San Agustín cuando decía:[20] ¿Qué?, tú, alimaña inmunda, ¿no querías decir un disparate? ¡Pues dilo, no importa!

Definición según Dedekind

Russell comete[21] la equivocación de creer que puede describir una forma lógica de modo incompleto.

Cuando se describe una forma lógica, debe describirse toda, sin que nada quede incompleto. Es absurdo describir a un hombre diciendo de qué color son sus ojos. Con ello no digo nada, como es fácil ver. Dejamos que las cosas vayan acercándose a nosotros y las vamos describiendo con mayor detalle cada vez. Pero la forma lógica no puede describirse primero *grosso modo* y luego con mayor particularidad. Por ejemplo, si describo una clase y no digo si es finita o infinita, mas advier-

[18] Comparar por ej. S. Kierkegaard, *Philosophische Brocken*, Cap. III (*Werke*, tomo VI, Jena, 1925, págs. 36 y 41): "¿Qué es, pues, eso desconocido contra lo que el entendimiento choca en su pasión paradójica...? Es lo desconocido. ...Es la barrera a la que se llega sin remedio."

[19] La taquigrafía de esta frase es especialmente difícil de leer, aunque su sentido general no ofrece dudas. Hay una palabra antes de "bien" que es totalmente ilegible. La referencia pertenece seguramente a las discusiones de Moore acerca de la indefinibilidad del bien en *Principia Ethica*, Cambridge, 1903, 5-14.

[20] Al parecer Waismann añadió la cita más tarde. No encuentro ese lugar en S. Agustín. Más bien recuerda un poco a aquel pasaje de las *Confesiones*, I, iv: "et vae tacentibus de te, quoniam loquaces muti sunt" ("y ¡ay de los que callen acerca de Ti, porque aun los que hablan es como si estuvieran mudos!") (Debo esta referencia a P. R. L. Brown.)

[21] R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Braunschweig, 1923, pág. 17: "Un sistema S se llama *infinito* cuando se parece a una auténtica parte de sí mismo; en caso contrario es *finito*". Whitehead y Russell emplean esta definición en *Principia Mathematica* II, Cambridge, 1912, págs. 190 y 278 *ss.*, como la definición de una "clase reflexiva".

to posteriormente que debo hacer esta distinción (que antes había pasado por alto) sobre si es finita o infinita, entonces completo la descripción diciendo: "Una clase es finita cuando... etc."

Parecerá como si primero tuviera que haber un sustantivo (clase) al que ulteriormente se le debiera añadir un adjetivo (finito, infinito), como cuando se habla de zapatos y se dice si son blancos o verdes. En realidad, no *puedo* describir el sustantivo sin el adjetivo o el adjetivo sin el sustantivo; ambos son inseparables. Una clase infinita es, de antemano, algo totalmente distinto de una clase finita. La palabra "clase" tiene en uno y otro caso sentido diferente, pues la verificación de la afirmación es también diferente.

"Existen infinidad de estrellas fijas." ¿Qué quiere decir esto? Imaginemos el siguiente caso: Que al descubrir un movimiento pendular, pudiera hacerlo con tanta mayor exactitud cuanto mayor fuera el número de estrellas fijas que lograra discernir. Supongamos que dijera: Si veo una estrella fija, cometo un error; si veo dos estrellas fijas, mi error será de ½; si tres, el error disminuirá a ¼...; si veo n estrellas fijas, el error será de $\frac{1}{2^{n-1}}$. (En total, la magnitud observada es de 2.) En este caso tendría derecho a suponer que existen infinidad de estrellas fijas. Pero también aquí el término "infinidad" es sólo un medio de explicación, que no equivale a otra cosa que a: Tengo una sucesión ilimitadamente [21a] progresiva de descripciones de las que una es siempre algo más exacta que la otra. También aquí "infinidad" expresa posibilidad; a saber, la posibilidad del paso a una descripción más exacta.[1]

O bien, supongamos el siguiente caso: Durante toda mi vida se ha hecho recorrer delante de mí una cinta blanco-roja,

---

1] Si, *v. gr.*, hablo de "todas las proposiciones", por ejemplo, (p)..., puede significar dos cosas:

1. Que indico la forma de las proposiciones p; por ejemplo, todas las proposiciones de la forma xRy.

2. Que entiendo bajo todas las proposiciones también las proposiciones de la forma xRy v uRv. Entonces debo conocer la ley según la cual se construyen esas proposiciones. Debo saber cómo llego a esas proposiciones.

[21a] No está claro en la taquigrafía qué palabra viene tras el prefijo i—. Es posible que sea "ilimitadamente" aunque Waismann no lo suele escribir de esa manera; de ningún modo dice "infinitamente".

blanco-roja, y que todos mis antepasados siempre hayan visto esa cinta. Entonces puedo hacer la siguiente descripción: Existe una cinta infinitamente larga que pasa frente a mí.

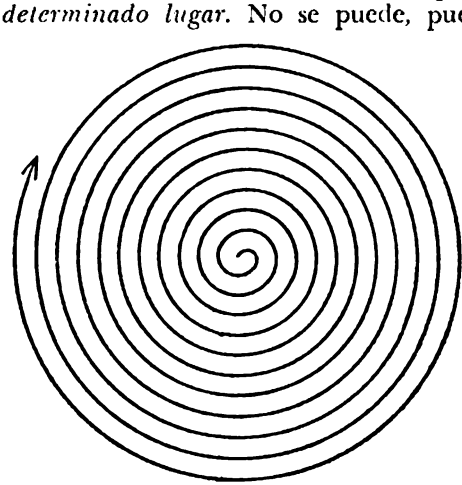
Y ahora llegamos a algo digno de atención: Podría afirmar que las palabras blanco-rojo tienen aquí sentido diferente del que poseen cuando suelo hablar de blanco-rojo refiriéndome al campo visual. En el campo visual no existe la posibilidad de hablar de infinidad de manchas blancas y rojas; pero en el caso de la cinta existe esa posibilidad. Cuando la sintaxis es diferente, el significado debe ser diferente también. Podría afirmar (por raro que resulte): Blanco y rojo significan aquí conceptos de geometría. (A esto se pudo referir Einstein cuando afirmó que entendía la geometría como una rama de la física.[21b])

Números reales I

$$\pi = 3{,}14159265\ldots$$

La extensión de tal número sólo puede ser una inducción.

La pregunta sobre si en π ocurren las cifras 0,1,2,...9, no puede ser pregunta. Lo único que puedo preguntar es si esas cifras aparecen en *un* determinado lugar, o si se presentan entre las 10 000 primeras cifras. La afirmación: "aparece" no se puede refutar en este caso de tan largo desarrollo; por consiguiente, tampoco se puede comprobar. Lo que se puede comprobar es una afirmación totalmente diferente; a saber, que la secuencia aparece en *determinado lugar*. No se puede, pues, ni afirmar



[21b] Véase la continuación de los lugares citados más arriba, pág. 33.

ni negar semejante aserción, ni emplear aquí la proposición del tercero excluido.

La inducción se parece a una espiral. Si conozco la primera circunvolución, conozco *toda* la espiral. ¿Toda? ¿Cómo, pues? Hay aquí una similitud que fácilmente nos tienta a hablar de "todo". Si conozco una circunvolución, no conozco desde luego toda la espiral, sino la ley de la espiral; consiguientemente, los primeros diez giros. En este último caso tiene sentido decir: Conozco una circunvolución, luego conozco toda (¡finita!) la espiral. Lo mismo sucede con el desarrollo de un número decimal. Lo que conozco es la inducción; esto es, la ley del desarrollo. Aquí puedo contemplar también la relación entre un desarrollo más corto y otro más largo.

Supongamos que construyo una fracción decimal según esta particularidad: Escribiré 0 en el enésimo lugar, si al probar con los 100 primeros números no he logrado hallar un valor para x, y, z para n, que corresponda a la igualdad de Fermat ($x^n + y^n = z^n$); escribiré 1, si he encontrado dicha n. El número decimal empieza así:

$$0{,}110000\ldots$$

Comparémoslo con el número 0,11. ¿Es mayor o igual que éste? La fracción decimal que acabamos de construir no es un número real, precisamente porque no es comparable con los números racionales. Lo decisivo en la construcción de los números reales está ni más ni menos en su comparabilidad. Por eso exactamente se pueden indicar los números reales sobre una línea.

Si hay formaciones que no se dejan comparar con los números racionales, no tenemos derecho a considerarlas racionales; de hecho no pueden ser dispuestas sobre las rectas numéricas. (Según Brouwer, parece que son números auténticamente reales aquellos de los que sencillamente no *sabemos* si son mayores, menores o iguales que otros números racionales.[22])

22 Verosímilmente, alusión a la conferencia de Brouwer "Matemáticas, ciencia y lenguaje" que al ser sustentada en Viena en marzo de 1928, entusiasmó mucho a Wittgenstein. (v. G. Pitcher, *The Philosophy of Wittgenstein*, Englewood Cliffs, N. J., 1964, pág. 8). La conferencia se publicó en *Monatshefte für Mathematik und Physik* 36, 1929, págs. 153-164. En la pág. 163, por ejemplo, Brouwer define así el número pendular: "el que no es racional; con todo, su irracionalidad es absurda, y no es comparable con el cero, aunque su incomparabilidad con el cero es absurda".

Existe analogía entre la relación de una vuelta espiral y 10 vueltas espirales, y entre la relación de una vuelta y toda la espiral. Pero no es más que una analogía; sin embargo, nos ha llevado a introducir infinidad de clases o cantidades.

Martes, 2 de enero de 1930 (con Schlick)

[[PROPOSICIONES ELEMENTALES]]

Deseo aclarar mi concepto de las proposiciones elementales: primero diré qué creí antes acerca de ellas y qué pienso ahora.

Tenía dos ideas sobre las proposiciones elementales, de las cuales una todavía me parece correcta, mientras que la otra ahora me parece completamente equivocada. Mi primera suposición era que, analizando las proposiciones, tenemos que llegar por fin a algunas que son la unión inmediata con los objetos, y esto sin ayuda de constantes lógicas, puesto que "no", "y", "o" y "si" [no] unen a los objetos.[23] Así lo creo aún.

En segundo lugar, opinaba que las proposiciones elementales debían ser independientes unas de otras.[24] La descripción completa del mundo sería a la par un producto de proposiciones elementales, que en parte serían positivas y en parte negativas.[24a] En esto me he equivocado y, por consiguiente, lo que ahora diré es erróneo:

Había dado reglas para el uso sintáctico de las constantes lógicas; por ejemplo, *"p.q"*. Pero no había pensado que esas reglas tenían que ver de un modo u otro con la estructura interna de las proposiciones. Falsa era, pues, mi idea de que se podía fijar la sintaxis de las constantes lógicas, sin parar mientes en la conexión interna de las proposiciones. No es así. No puedo decir, *v. gr.:* Un punto es rojo y azul a un mismo tiempo. Aquí no está claro cuál sea el producto lógico. Las reglas de las constantes lógicas forman sólo una parte quizás de una comprehensiva sintaxis de la que antes nada sabía.

Buen ejemplo de esto es la descripción de una superficie, como esta hoja de papel. (Quiero recalcar que no es un símil preciso, sino que siempre es así como en este ejemplo.) Su-

23 Hay algo equivocado en la segunda parte de la frase. Seguramente Waismann se dejó el "no" por descuido.

24 Véase la nota de la pág. 58.

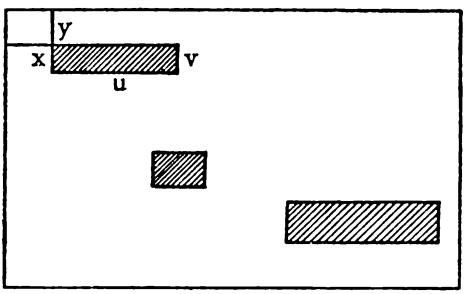
24a Seguramente quiere decir aquí: "un producto de proposiciones elementales y de negaciones de proposiciones elementales".

pongamos que hay una proposición que describe la división de los colores de esta hoja; supongamos además que en ella los colores están bien delimitados, sin matices intermedios de un color a otro. Primero describimos las lindes de los colores; para ello nos podemos servir de ecuaciones de la geometría analítica. Luego, pasamos a describir los colores; a este efecto seguiremos algún sistema de descripción de colores, por ejemplo, utilizaremos indicadores. (Podemos idear varios sistemas de este tipo.)

La descripción contendrá por tanto: Ecuaciones de líneas e indicadores para colores. Estos elementos de la descripción son indispensables; esto es, toda descripción posible ha de contener esa multiplicidad. La descripción puede ser incompleta. Digo por ejemplo: El interior de una mancha es azul; lo restante del papel en parte es blanco y en parte negro.[25]

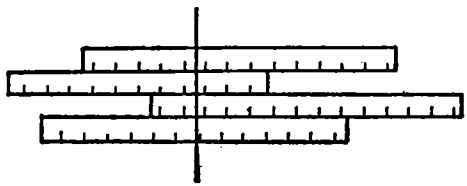
Voy a simplificar todavía más el ejemplo y voy a suponer que las manchas de color que debo describir son ángulos rectos y cuadrados, situados paralelamente a los bordes del papel.

Cada ángulo recto puede ser descrito mediante cuatro datos numéricos, a saber, por las coordenadas de la parte superior



[25] En el cuaderno de apuntes el diagrama siguiente está en hoja aparte. Posiblemente sería una ilustración general de todo lo que sigue.

izquierda del ángulo de arriba, por su longitud y altura; o sea, por (x,y,u,v). Los datos de estas cuatro coordenadas no corresponden con ningún otro dato. Por lo mismo, puedo describir los colores del ángulo recto aplicando la escala cromática. (Los colores no tienen ciertamente la multiplicidad de la longitud y por lo mismo no es posible medirlos con *una* escala.) En vez de describir la división de los colores por proposiciones, lo podría hacer por un sistema de escalas: Tomaría tantas escalas cuantas coordenadas aparecieran en mi descripción y *dispondría así las escalas:*



Lo que resultara al servirnos de un conjunto de semejantes escalas sería la descripción completa de esa superficie. En todo sucede como aquí. Damos a la realidad una coordenada: un color, un brillo, una dureza, etc. La descripción ha de ser de modo que no contenga dos veces la misma coordenada. Para evitar esto, necesitaremos una sintaxis; pero podemos salir del paso, aun sin esa sintaxis, si desde el principio empleamos un sistema de descripción que no dé a la realidad dos diferentes valores de coordenadas.

Cada proposición está en el sistema proposicional como una escala que se aplicara a la realidad. (Espacio lógico.) [25a]

En lo que no había parado mientes en un principio era en que la sintaxis de las constantes lógicas constituyen solamente una parte de una sintaxis comprehensiva; por ende, solamente podré construir el producto lógico de p.q si p y q no poseen dos veces las mismas coordenadas.

Si las proposiciones fueran independientes, todo quedaría en potencia, incluso toda la teoría de la inferencia, etc.

SCHLICK: ¿Se puede responder a la pregunta: cómo sé que tales reglas de sintaxis son valederas? ¿Cómo sé que un punto no puede ser rojo y azul al mismo tiempo? ¿No existe ningún medio de obtener un conocimiento empírico?

[25a] Comparar: *TLP* 2,1512 y 3,42.

WITTGENSTEIN: Sí y no; depende de lo que se quiera entender por empírico. Si por empírico se entiende un conocimiento que puede ser expresado con una proposición, entonces no se trata de un conocimiento empírico. Si por empiría se entiende algo distinto, entonces también es empírica la sintaxis. En el *Tractatus* he escrito: "La lógica es antes que el cómo, pero no antes que el qué".[26] La lógica depende de que exista algo (en el sentido de que algo se dé), de que existan cosas, pero es independiente de cómo están hechas, de ser-así. Que existen cosas no es describible por proposiciones. Si quiere, le puedo decir: La lógica es empírica, si a *esto* le llama usted empiría.

[Si decimos: algo es empírico y queremos indicar: lo podemos pensar de otra manera (en este sentido, cada proposición con sentido será fortuita). En este sentido también, la existencia del mundo no es empírica, pues no lo podemos imaginar de otro modo; no nos podemos imaginar un mundo que sea y no sea. Nota posterior a la conferencia de Wittgenstein sobre ética; transcrito aproximadamente.[27]]

SCHLICK: ¿Cómo sé que son ésas las reglas que rigen y no otras? ¿No me puedo equivocar?

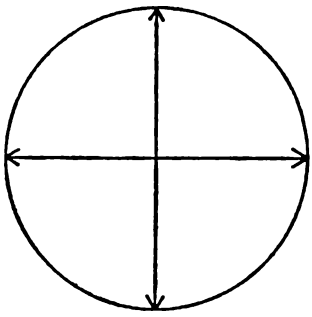
WITTGENSTEIN: Se trata siempre de lo siguiente: Todo cuanto hacemos depende de que encontremos la palabra salvadora. En gramática no se puede descubrir nada; no se dan sorpresas. Cuando formulamos una regla, siempre tenemos la impresión de que ya hace tiempo que sabíamos eso y sólo podemos aclarar la regla que habíamos venido empleando inconscientemente. Si sé qué significa la longitud, sé también que cuando un hombre mide 1.6 m, no mide 2m. Sé que al medir sólo fijo un valor en una escala y no más valores. Si me pregunta: ¿Por qué sabe esto?, le responderé sencillamente: Porque entiendo el sentido de la expresión; es imposible entender el sentido de tal expresión y no conocer la regla. [Puedo conocer la regla por la práctica, sin haberla formulado expresamente.]

Si entiendo el sentido de una expresión cromática, sé también que no pueden darse dos colores en el mismo sitio, etc. Supongamos el siguiente caso: Usted dice: He aquí un círculo cuya longitud es de 3 cm y cuya anchura es de 2 cm.

Pero yo preguntaría: Sí, ¿pero qué entiendes por un círculo? Si entiendes la palabra "círculo" en el mismo sentido que nos-

[26] *TLP* 5,552.

[27] *LE*, pág. 9. Esta aclaración denota que la conferencia fue escrita antes de enero de 1930. R. Rhees dice que tuvo lugar entre el mes de septiembre de 1929 y el de diciembre de 1930.



otros, entonces hay que tener presente que las reglas de la sintaxis impiden que empleemos las coordenadas del círculo (el radio) dos veces. Las reglas de sintaxis se deducen de la definición de círculo, y esa definición nos está diciendo qué sentido tienen las afirmaciones sobre el círculo. Si entiendo el sentido de una proposición, debo entender también la sintaxis de la expresión que la representa. En gramática no se puede descubrir nada, sino solamente aclararse.

SCHLICK: ¿Cómo es que entendemos fácilmente cuando se nos dan longitudes, no así cuando se trata de colores? Husserl cree haber descubierto aquí una serie de juicios sintéticos a priori.[28] ¿Dónde está psicológicamente la razón de que en un caso se vea claro y en el otro no? Husserl debió suponer, consecuentemente, que también la sintaxis de las longitudes eran juicios sintéticos a priori.

WITTGENSTEIN: Pueden ser varias las razones. Por ejemplo, al aplicar la escala se ve desde luego que si algo mide dos metros no puede medir tres, pues hay un metro de diferencia; pero no poseemos ninguna escala para los colores.

WAISMANN: Muchos psicólogos creen que se trata aquí de hechos atómicos empíricos y han procurado realizar experimentos para averiguar si es posible ver dos colores en un mismo sitio.

WITTGENSTEIN: También eso sería posible, pero debería decirme qué método han seguido esos psicólogos, o sea, qué han hecho valer como verificación; sólo así podría decir cuál es el sentido de tal suposición. Podría ser muy bien que tal investigación tuviera su sentido; pero téngase presente que el método sólo se entiende en la respuesta por la que propiamente se ha preguntado. Sólo cuando he respondido a la pregunta pue-

[28] Ver más arriba, nota de la pág. 60.

do saber por qué cosa he preguntado. (El sentido de una proposición es el método de su verificación.)

SCHLICK: No quedo todavía satisfecho. ¿No se debería construir un lenguaje en que se mostraran inmediatamente las reglas de su sintaxis?

WAISMANN: Tal es el caso cuando tomamos un sistema de escalas como descripción. Si el sistema de signos tiene la debida multiplicidad, salen sobrando las reglas de sintaxis. Por eso el empleo de la expresión "al norte de" está sometido a ciertas reglas sintácticas. Yo no puedo decir: "A está al norte de B y B está al norte de A"; pero no hace falta un mapa que explique este sinsentido porque posee la debida multiplicidad.

WITTGENSTEIN: Siempre es así: La sintaxis y los signos trabajan en sentido inverso. Lo que los signos nos prestan, es a costa de la sintaxis, y lo que la sintaxis nos ofrece es a costa de los signos. Puedo decir: Un sistema de signos con la debida multiplicidad desplaza a la sintaxis. Pero también puedo decir: La sintaxis desplaza a tal sistema de signos. Puedo emplear un sistema de signos imperfecto y añadirle reglas de sintaxis. Uno y otra nos dan lo mismo, pues [[se]] trata del mismo sistema de exposición.

Por ejemplo, mi notación de constantes lógicas no es ni mejor ni peor que la de Russell.[29] Los signos y la sintaxis de Russell dan lo mismo que mi notación, aunque la mía quizás tenga la ventaja de ser más clara. Muestra, por ejemplo, que el conjunto de todas las proposiciones de la lógica es lo que propiamente se necesita, pero en sí el sistema gráfico de Russell está igualmente justificado. Mi sistema de signos tiene de antemano la debida multiplicidad, por lo que no necesito las reglas sintácticas de Russell.

En resumen se puede decir: El acoplamiento de las proposiciones de una función de verdad solamente constituye una parte de una sintaxis. Las reglas que establecí en su tiempo quedan restringidas por las reglas que brotan de la sintaxis interna de las proposiciones y que prohiben que dos proposiciones de la realidad den distintas coordenadas. Están permitidas todas las funciones de verdad que no queden prohibidas por esas reglas.

SCHLICK: ¿No se tiene la impresión de que las constantes lógicas (las funciones de verdad) son más esenciales que las reglas especiales de sintaxis y que la posibilidad de construir

[29] Por ejemplo, "(VVFV) (p,q)" quiere decir: "Si p, entonces q". Compárese con *TLP* 4,442; 5,101.

un producto lógico "p.q" es más general y en cierto sentido más comprensiva que las reglas de sintaxis sobre que lo rojo y lo azul no pueden estar en el mismo lugar? La primera regla no contiene nada de color y lugar.

WITTGENSTEIN: No creo que aquí exista diferencia alguna. Las reglas para el producto lógico, etc., no se han de desprender de otras reglas de la sintaxis. Ambas pertenecen al método de figuración del mundo.

[["LA SITUACIÓN GNOSEOLÓGICA ACTUAL EN MATEMÁTICAS"]]

Wittgenstein lee un artículo de Weyl (en Symposion)[30] *y va comentando.*

Transcripción aproximada

WEYL dice: Una razón matemática o vale para todos los números —en cuyo caso no se puede negar— o vale solamente para un número concreto —lo que indica existencia—, o no se da ninguna de las dos contingencias. Tanto el primer caso como el segundo no se comportan recíprocamente como proposición y negación.

WITTGENSTEIN: En el segundo caso hay una aserción matemática que puedo afirmar o negar, pero no se ve nada que haga referencia a la existencia.[1] Cuando digo: en el ochocen-

1] Weyl lo afirma así, como si existiera una aserción totalitaria, pero ninguna negación, porque la aserción sobre la existencia es una "abstracción de juicio" y solamente la construcción (hallazgo del número) dice algo. Pero en realidad se trata aquí de dos cosas totalmente distintas. La aserción totalitaria se puede expresar correctamente por una inducción y como tal no puede ser negada. La afirmación de que en determinado lugar aparece un número es naturalmente una aserción y como tal puede ser negada, pero la negación vendrá a decir: En ese lugar no aparece dicho número. El error proviene de considerar la extensión como un todo. Tiene sentido decir: Si 7 aparece en el lugar vigésimoquinto, aparece por tanto entre el vigésimo y el trigésimo lugar. Mas no hay sentido en decir: el 7 aparece de todas maneras. Esto no es ninguna aserción.

Weyl echa demasiadas cosas en el mismo puchero. La propo-

30 "Die heutige Erkenntnislage..." en *Symposion*, I (1927), págs. 1-32.

tésimo lugar de π aparece una secuencia, sólo he dicho eso y nada más. Si lo niego, solamente digo: en el ochocentésimo lugar no aparece ninguna secuencia; que no es lo mismo que: no hay secuencia alguna.

La aserción para todos los números no viene representada por una proposición sino por la inducción, y ésta no puede ser ni negada ni afirmada, pues nada asevera. Por consiguiente, donde aparezca una afirmación, puede negarse, y si una forma no puede ser negada, no hay tampoco ninguna afirmación. La proposición del tercero excluido no entra aquí porque, sencillamente, no se trata de proposiciones.

La generalidad no se muestra en las letras, pues nada tiene que ver con ellas. La generalidad se muestra en que la cosa procede de determinada manera *sucesivamente*. (Lo mismo que indica un giro de la espiral.)

La elección arbitraria

La elección arbitraria es algo empírico; son sencillamente los números que escribo sobre el papel. Si Weyl juzga que constituyen una formación matemática, porque de una sucesión arbitraria puedo derivar otra siguiendo una ley general, por ejemplo:

$$m_1, m_2, m_3, \ldots$$
$$m_1,\ m_1 + m_2,\ m_1 + m_3, \ldots$$

se le puede responder: No, con eso sólo se muestra que puedo sumar números, pero no que una serie arbitraria sea un concepto matemático legítimo.

---

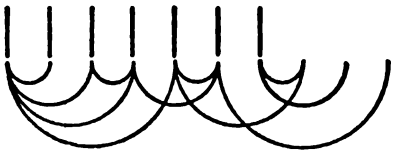
sición "el 7 no aparece entre el vigésimo y el trigésimo lugar" se comprueba de modo diferente que "el 7 no aparece en realidad".[31] Si se comprueba de modo diferente, *es una proposición diferente.*

Si a la pregunta de si la cifra 7 aparece en el desarrollo de π, se responde: Sí, aparece en el vigésimoquinto lugar, sólo se ha respondido a la pregunta de si 7 aparece en vigésimoquinto lugar, pero no a la pregunta de si 7 aparece de todas maneras. Si la pregunta tiene sentido, también lo tiene la respuesta, sea ésta afirmativa o negativa.

[31] No se lee claro si se trata de la palabra "en realidad". Ciertamente no es "sin más".

¿Qué significa la expresión: En el cuarto lugar de una serie arbitraria hay un número primo? ¿Qué significa si dispongo ciruelas en montoncitos y digo: Aquel montoncito contiene un número primo de ciruelas?

Supongamos que representamos la expresión del modo siguiente: Trace usted rayas a igual distancia (tantas como ciruelas haya), tire arcos y vea si se cierra algún arco con la última raya.



Esto *no* querría decir que el número de rayas es un número primo. La expresión podría serlo, mas el procedimiento no lo mostraría; en realidad excluye la aserción matemática, pues no he estado tratando de matemáticas, sino de lápiz, papel, compás y vueltas, etc., pero para nada he nombrado los números primos. Si un demonio escamoteara una raya, ¿dejaría el número 7 de ser número primo? Quizás no he explicado bien la cosa; quiero decir que la aritmética siempre puede entrar en una descripción, pero la descripción no es la aritmética.

Puedo decir: La cantidad de las ciruelas es un número primo, sin haberlas contado. Esa afirmación puedo haberla hecho por decir un número, pero no puedo concluir que la cantidad de ciruelas es *7, y 7 es un número primo.*

[[*Varia*]]

Crítica de la concepción del tiempo en la aritmética de Weyl.[32] Negativa a la cuestión de si los números cardinales son antes que los ordinales. Negativa a la concepción de Kaufmann de que el número es aquello que al contar en diverso orden siempre permanece invariable.[33]

32 Parece que no se refiere aquí al artículo de *Symposion,* sino a "Philosophie der Mathematik..." (Ver nota 1 de la pág. 33), pág. 28: "Pero la posibilidad de ordenar en pares, de que se habla en el criterio de la igualdad numérica, sólo se puede comprobar cuando la ordenación se realiza en serie cronológicamente dispuesta... Por esto me parece que es irrebatible que los números *ordinales son primarios.*"

33 F. Kaufmann, *Das Unendliche in der Mathematik und seine Ausschaltung,* Leipzig y Viena, 1930, págs. 78-79.

Schopenhauer: Cada número supone que los anteriores son base de su ser.[34] Wittgenstein: pero también que lo son los que le siguen.[35]

Domingo, 5 de enero de 1930 (con Schlick)

PROPOSICIONES POSITIVAS Y NEGATIVAS [1]

¿Tiene la proposición negativa menos sentido que la positiva? Sí y no.

Sí, cuando se quiere decir lo siguiente: Si yo puedo concluir de p a q, pero no de q a p, entonces q tiene menos sentido que p. Si digo: "La azalea es roja" y "la azalea no es azul", puedo concluir de la primera la segunda, pero no a la inversa. En esta inteligencia se puede afirmar que la proposición negativa tiene menos sentido que la positiva.

No, cuando se trata de lo siguiente (que es lo que me im-

1] Un buen método para ilustrar el carácter formador del lenguaje consiste en emplear las proposiciones del lenguaje como *instrucciones* para efectuar algo. Con mis palabras le dirijo a usted por la habitación: "Adelante usted tres pasos; ahora dé dos pasos hacia la izquierda; extienda el brazo derecho; algo más alto; no, demasiado ahora, etc." Aquí se ve claro que el lenguaje ha de tener la misma multiplicidad que los movimientos que dirijo con mis proposiciones. Todo cuanto usted hace debe contenerse en lo que digo. (Si hay que ponerle tres velocidades a un coche, puedo convertir esto en imposible utilizando una palanca que sólo admita dos posiciones.) Asimismo, con mis palabras puedo dirigir la mezcla de colores. Digo: "Tome el azul, algo de blanco, más blanco todavía, ahora otro poquito de azul, y así sucesivamente." Si expreso una proposición negativa, como: "No tome el color azul", no le estoy indicando que levante los brazos, o que baile, sino que la proposición únicamente le veda tomar el azul, dejándole en libertad respecto a los demás colores. Así, pues, la proposición negativa da a la realidad la misma multiplicidad que la positiva y a esto exclusivamente me refiero cuando digo que la proposición negativa tiene tanto sentido como la positiva.

34 *"Über die vierfache Wurzel..."* Parágrafo 38, citado por Weyl, en "Philosophie der Mathematik", arriba reseñado.

35 En el cuaderno de apuntes sigue una laguna de página y cuarto.

porta): La proposición negativa da a la realidad la misma multiplicidad que la proposición positiva. Cuando afirmo: "No tengo dolor de estómago", doy a la realidad la misma multiplicidad que cuando digo: "Tengo dolor de estómago". Pues cuando digo: "No tengo dolor de estómago", implico en esa proposición la existencia de la proposición positiva; supongo la posibilidad de los dolores de estómago, y mi proposición tiene su lugar en el espacio de los dolores de estómago. O sea, no es que mi estado actual no tenga la menor relación con los dolores de estómago. [Cuando digo: "Está a cero grados", he indicado el punto cero del espacio de la temperatura.] Decir: "No tengo dolor de estómago" equivale a: "Me encuentro en el punto cero del espacio del dolor de estómago." La proposición presupone todo el espacio lógico. [De igual modo: "Estos dos cuerpos no tienen ninguna distancia entre ellos" es del mismo tipo que la proposición: "Estos dos cuerpos tienen esta distancia entre ellos." En ambos casos, la misma multiplicidad.]

A esto segundo me refiero cuando hablo de que la proposición positiva no tiene más sentido que la negativa. Ambas dan a la realidad la misma multiplicidad.

WAISMANN: La proposición negativa da a la realidad más espacio de juego que la positiva. Si digo, por ejemplo: "La azalea no es azul", no sé todavía qué color tiene.

WITTGENSTEIN: Sin duda, en ese sentido la proposición negativa dice menos que la positiva. Yo he escrito una vez: "Entiendo el sentido de una proposición cuando sé qué pasa cuando la proposición es verdadera y cuando es falsa." [36] [1] Con eso quise decir que si sabía cuándo era verdadera, sabía *por lo mismo* cuándo era falsa. Si digo: "La azalea no es azul", sé también cuándo es azul. Para averiguar que no es azul tengo que compararla con la realidad.

WAISMANN: Usted emplea la palabra *comparar*. Cuando comparo la proposición con la realidad, me entero de que la azalea

---

1] Para entender el sentido de la proposición: "La azalea no es azul", no necesito representarme los demás colores, y aunque me represente algo, no significa esto que entienda necesariamente el sentido de la proposición.

Para entender las palabras "azul", "rojo"... no necesito vivenciar los colores. [El pensamiento no tiene nada que ver con la creación de vivencias.] Me basta con entender el sentido de la aserción en que ocurren esas palabras.

[36] *NL*, págs. 93-94; comparar con *TLP* 4,024; 2,223.

es roja e *infiero* de ello que no es azul, ni verde, ni amarilla. Lo que veo es el hecho atómico, pero jamás podré ver que la azalea no es azul.

WITTGENSTEIN: Yo no veo rojo, sino que veo *que la azalea es roja.* En ese sentido veo también que no es azul. No se liga con lo visto una inferencia, sino que ésta brota inmediatamente de la visión.

Las proposiciones positivas y negativas se hallan al mismo nivel. Cuando aplico la escala no sólo sé la longitud de algo, sino la longitud que no tiene. Al verificar la proposición positiva, falsifico la negativa. En el momento en que sé que la azalea es roja, sé que no es azul; ambas cosas son inseparables. Las condiciones de verdad de una proposición fijan también las condiciones de su falsedad, y a la inversa.

EL COLOR AZUL EN EL RECUERDO

Es digno de atención el proceso de la rememoración. La gente se imagina que siempre llevamos con nosotros una clase de imagen rememorativa de los colores vistos y que *comparamos* esa imagen con el color que vemos. Se cree, pues, que se trata de una comparación, pero no es así del todo. Figúrense lo siguiente: Acaban de ver un determinado azul, un azul celeste pongamos por caso, y ahora les muestro diferentes tonalidades de azul y ustedes me van diciendo: "no, no, no era éste; tampoco ése, ni aquél... ¡éste era!" Es como si tuvieran en la cabeza varias teclas y yo fuera probando hasta dar con una que *sonara* de modo particular. ¿Es así el reconocimiento de los colores? ¿Es casi como si sonara algo en mí, como si algo se cerrara de golpe al ver el color preciso? ¡No!, sino que yo sé de un determinado color no sólo que no es el color que quiero, sino que sé también en *qué dirección* debo variar los colores hasta dar con el color requerido.[1] Es decir, que *sé el camino para buscar el color.* Yo puedo estar dirigiéndoles mientras mezclan los colores: Más blanco, más todavía; ahora demasiado; algo de azul, y así sucesivamente. O sea, que un color presupone todo el *sistema cromático.* El reconocimiento de un color

1] Cuando golpeo una tecla y no suena, no sé en qué dirección debo continuar para dar con la tecla que busco. Pero en el caso de los colores no es que no tenga idea de dónde esté el color que me interesa; ya sé algo de él: sé el camino para llegar a él.

no es una simple comparación, aunque se parezca en muchas cosas a una comparación. El reconocimiento se parece a una comparación, pero no lo es.[1]

De modo similar: Cuando en un juego de sociedad se busca un alfiler que ha sido escondido, no se busca en el espacio —pues no se tiene ningún método para la búsqueda—, sino en el espacio lógico que se crea con las palabras "frío", "caliente", "quemando". Sólo se puede buscar cuando existe un *método para la búsqueda.*

"El mundo es rojo" II [2]

Vuelvo a la pregunta del Profesor Schlick sobre qué sucedería si sólo conociera el color rojo.[37] Al respecto se ha de decir lo siguiente: Si todo lo que viera fuera rojo y pudiera describirlo, podría construir la proposición que dijera que algo no es rojo. Esto también presupone la posibilidad de la existencia de otros colores. Pero si el rojo es algo que no puedo describir, entonces no poseeré proposición alguna y no podré negar nada. En un mundo en que el rojo jugara casi el mismo papel que el tiempo en el nuestro, no existirían las afirmaciones del tipo: Todo es rojo, o: Todo cuanto veo es rojo.

Por consiguiente: Mientras haya un hecho atómico, puede ser descrito, y entonces el color rojo presupondrá el sistema cromático; o bien, el rojo significa algo totalmente diferente

---

1] El significado de una palabra no consiste en hacer presente su contenido (representar visualmente, vivenciar), sino en que conozco el camino para llegar al objeto.

2] "El mundo es rojo": Si lo puedo aseverar con una proposición, la proposición es negable y ocupa un espacio. Si no se puede describir con alguna afirmación, entonces tampoco puedo *preguntar* si el rojo presupone el sistema cromático.

[Todo lo que es, puede ser de otro modo. O bien: Sólo existe aquello que puede ser también de otro modo.]

Un signo (palabra) sólo tiene significado en la proposición.

Si no pudiera construir la aserción: "Todo cuanto veo es rojo", no tendría signigicado tampoco la palabra "rojo".

Cuando la palabra "rojo" tiene de alguna manera un significado, se presupone inmediatamente un *sistema cromático.* [¿Nuestro sistema?]

37 Ver *supra,* págs. 59 *s.*

y entonces no tendrá sentido llamarlo color y no se podrá hablar de él.

¿Pertenece cada proposición a un sistema? II

Depende ante todo de lo que se quiera decir por "sistema".

Toda indicación sobre longitudes pertenece a un sistema, pues si entiendo que algo mide 3 metros, entiendo también que no mide 5. El dato pertenece ya a un espacio de longitudes posibles. Igualmente, toda cosa tiene a su alrededor un espacio cromático, un espacio de dureza, etc.[38] Cuando yo estaba escribiendo esto, no había visto que el número de lugares de este espacio era como las divisiones de una regla graduada, y que siempre empleamos todo el sistema proposicional como una escala que aplicáramos a la realidad. La pregunta en sí debería formularse: ¿Presupone la proposición "φa" otras proposiciones de ese tipo, *v. gr.*, "φb"?

Waismann: Que éste sea el caso, lo ve cualquiera si considera que en cada proposición se puede sustituir una constante por una variable. La posibilidad de la formación del concepto muestra que cada proposición pertenece a un espacio lógico, espacio lógico que es lo mismo que sistema.

Wittgenstein: La cosa no es así. ¿Puedo siempre sustituir una constante por una variable? Entonces ocurre lo siguiente: si es posible "φa", también lo será "~φa".

Waismann: ¿Cómo puedo saber que "~φa" es verdadero? Solamente asegurándome de que existe un hecho atómico de la forma "φb". La posibilidad de la negación presupone también un espacio lógico.

Wittgenstein: Todo depende de si el signo "a" es un *signo necesario*. Si solamente existiera escuetamente la proposición "φa", y no "φb", entonces saldría sobrando mencionar "a"; bastaría con escribir solamente "φ". Consecuentemente, no se formaría la proposición, y lo esencial en una proposición es que sea *una figura* y tenga composición. Si "φa" es una proposición, tiene que darse una proposición "φb"; o sea, que los argumentos de "φ ( )" forman un sistema. Lo que en realidad no sé es la extensión del ámbito de los argumentos. Puede que sean dos solamente. (Al llamar por teléfono: libre, ocupado; aquí sabemos que solamente se presentarán esos dos valores y que ellos solos son los que forman la realidad. Una situación intermedia no indica nada. No hay otra salida.)

38 Comparar *TLP* 2,0131.

¿Presupone "φa" también a "ψa"? Sin duda, pues reflexionando deducimos que si solamente existiera una función "φ" para "a", sería aquélla superflua y se la podría omitir. Entonces el signo proposicional sería también simple y no compuesto. No figuraría.[39]

Los signos que son indispensables no tienen significado. Los signos superfluos no denotan nada.[40]

Resultado: Si en una proposición ocurren tantas constantes, en otras tantas dimensiones es variable la proposición y tantas dimensiones tiene el espacio al que pertenece.

La proposición atraviesa todo el espacio lógico,[41] pues de lo contrario la negación no sería inteligible.

Inferencia

Waismann: De una proposición completa se puede inferir otra incompleta.[42] Si, por ejemplo, sé que en un cuadrado hay inscrito un círculo determinado, sé también que en el cuadrado hay algún círculo. ¿Qué es, pues, la inferencia? ¿Es una tautología? ¿O se dan formas de inferencia que no tienen la estructura de las tautologías?

Wittgenstein: La tautología es de poca importancia en sí. Sólo en una determinada notación aparece la inferencia como tautología. Pero sí son esenciales las reglas de sintaxis que todo el mundo ha empleado desde siempre, mucho antes de que se supiera qué era una tautología.

Una descripción determinada tiene esta estructura: Una longitud es de 25 m. La descripción indeterminada diría: Una longitud está entre 20 y 30 m. Ahora, representemos ambas descripciones por "p" y "q", respectivamente. Sé por la sintaxis de la palabra "longitud" [43] que es imposible que la primera proposición sea verdadera y falsa la segunda; es decir, no puede ser "p.~q". Construyamos las funciones de verdad de "p⊃q" (o mejor, unas funciones de verdad que sean *análogas o parecidas* a la implicación) y tomemos en cuenta las exigencias de la sintaxis. Entonces se dará una tautología.*

39 Probablemente el sujeto es "la proposición".
40 Comparar *TLP* 3,328; 5,47321.
41 Comparar *TLP* 3,42.
42 Ver arriba, págs. 34 *ss.*
43 *Sic.*

* Wittgenstein emplea el término "implicación" en sentido material. En ese sentido, se trata de un condicional entre cuyo antecedente y con-

Frege, Peano y Russell creen que el "si" de la inferencia jugaba papel peculiar. Russell, además, cree que la inferencia se representa por la implicación "⊃".[44]

p	q	p⊃q
W	W	W
~~W~~	~~F~~	~~F~~
F	W	W
F	F	W

Empero, la inferencia nada tiene que ver con el "si". En mi notación[45] se *muestra* la corrección de la inferencia en que "p⊃q" es una tautología. Pero en modo alguno es necesario mostrar así la corrección de la inferencia. Con la misma garantía se muestra su legitimidad, por las reglas de la inferencia. Esta es sólo una notación entre otras posibles, pero que tiene quizás la ventaja de dejar ver las cosas más claras; mas en sí, los signos de Russell, junto con las reglas de su empleo sintáctico, dan lo mismo.

Que la inferencia sea a priori quiere decir solamente que es la sintaxis la que decide si es correcta o incorrecta. La tautología es sólo un modo de mostrar lo sintáctico.

Conferencia sobre ética[46]

Las expresiones de ética tienen doble significado: uno, psicológico, del que se puede hablar, y otro no-psicológico: "buen

secuente no es preciso que exista relación (Si Egipto existe, la Tierra tiene un satélite) pero cuya condición de verdad y utilidad lógica es que el consecuente sea verdadero, o que antecedente y consecuente sean falsos (ver diagrama). La implicación se llama estricta o formal cuando el antecedente "implica" el consecuente. En la implicación formal la inferencia de la condicional anterior sería falsa. En todo caso no salimos de la tautología. [T.]

44 Peano llama propiamente a cada proposición que contiene esa constante lógica "une déduction" *(Notations de logique mathématique,* Turín, 1894, pág. 10). "La única forma de inferencia" de Frege contiene esa constante *(Grundgesetze* I, Jena, 1893, pág. 26). Whitehead y Russell *(Principia Mathematica* I, Cambridge, 1910, págs. 21 *ss.),* opinan que las implicaciones formales, que naturalmente también contienen esa constante, son útiles para las deducciones. Esa constante la emplean junto con dos líneas de juicios para expresar una inferencia *(ibid.,* pág. 96).

45 Probablemente, la notación ilustrada en el diagrama superior.

46 Este informe esquemático, con pequeñas variantes, de la conferencia ya citada del 2 de enero de 1930 (ver arriba, pág. 69 y nota) verosímilmente está basado en el texto alemán perdido.

jugador de tenis", "bueno". En las distintas expresiones nos referimos a lo mismo.

Asombro sobre los hechos del mundo. Todo intento de expresarlos lleva al sinsentido.

El hombre tiene la tendencia de correr contra las barreras del lenguaje. Todo ese correr hace alusión a la ética. Todo lo que describo está en el mundo. En la descripción completa del mundo no acude ni una vez una proposición de la ética, incluso cuando describo a un asesino. Lo ético no es un hecho atómico.

Probabilidad I

La primera pregunta es: Cuando al echar una moneda al aire digo que existe igual probabilidad de que salga cara o cruz, ¿es una profecía?

Si fuera una profecía se podría comprobar por la experiencia. Pero está claro que no hay posibilidad de confirmar una aserción sobre probabilidad. Salga lo que salga, puedo seguir manteniendo mi aserción acerca de la igualdad de probabilidad. ¿Qué significa, pues, una aserción sobre probabilidad?

Cuando afirmo que es igual de probable que salga cara o cruz, vengo a decir: No sé si saldrá cara o cruz, pero las circunstancias que conozco (todo lo que sé acerca de la moneda, acerca de echarla, las leyes de gravedad, etc.), no me dan más fundamento para creer que saldrá cara en vez de cruz.

La probabilidad es una forma de descripción. Hay una forma de describir la realidad, la probabilidad, lo mismo que se dan leyes naturales sobre la forma mínima.

Mi concepto acerca de la probabilidad tiene que ser otro ahora, pues he cambiado de raíz el que tenía sobre las proposiciones elementales. La probabilidad es una relación interna entre las cosas.

Lo que logro comprobar no es nunca la corrección del *cálculo de probabilidades,* sino las *presuposiciones* que he establecido.

Del mismo modo como el físico no controla en sus experimentos la corrección de sus inferencias lógicas, sino la verdad de las hipótesis de que ha partido, así por la experiencia no se puede saber el acierto o desacierto del cálculo de probabilidades.

[La probabilidad solamente tiene que ver con la forma de las aserciones. No existe un objeto "la probabilidad".

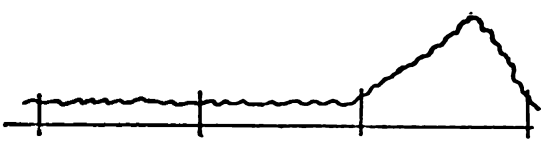
Las aserciones acerca de la probabilidad no describen a ésta, sino que se sirven de la forma de la probabilidad para describir la realidad. Se requiere la probabilidad cuando nuestra descripción de los hechos atómicos es incompleta. La probabilidad depende por esencia de la descripción incompleta.]

Otra cosa es cuando se trata de asegurar. Entonces no entra la probabilidad aunque sea a posteriori, sino que no existe relación con ella. [?]

¿Qué se afirma, pues, cuando se dice que un hombre de cuarenta años tiene probabilidad de vivir sesenta? Aquí estamos ante una aserción estadística: De tantos y tantos hombres de cuarenta años, han llegado a los sesenta tantos y tantos. ¿Quiere decir esto que en el futuro llegará a los sesenta el mismo porcentaje? Desde luego que no, aunque la compañía de seguros afirme que esos cálculos son valederos para el futuro. En realidad no se trata más que de una *inducción,* lo mismo que sucede con las leyes de la naturaleza. No puede darse una probabilidad para esa inducción, y carecería de sentido.

Las compañías de seguros profetizan, y su aserción, si ha de poseer algún sentido, ha de poderse comprobar de *alguna manera.* Ha de decir: En los próximos 70 o 10 años morirán tantos y tantos hombres. Si no sucede así, la aserción pierde todo sentido.

Cuando ocurre algo de excepción se alega: Aquí no vale nuestra estadística, pues en ese año hubo guerra, epidemia, etc. Si se da la excepción sin que se vea factor de ese tipo, puede descargarse la responsabilidad sobre el tiempo. (Se puede decir, por ejemplo, a los 1930 años después de un gran fundador religioso la mortalidad es tal y tal. Todo lo que se puede describir, puede proponerse como causa de una excepción.)



Dado

¿Qué quiere decir que se da $^1/_6$ de excepciones sistemáticas de la probabilidad?

Ante todo, debemos darnos cuenta de que en el dado presuponemos todo un sistema de experiencia; a saber, que los nú-

meros de sus caras no influyen en el resultado. Hagamos la siguiente prueba: Peguemos a lado y lado de una moneda sendos signos, tras habernos cerciorado de que pesaban igual. Podremos afirmar que los signos que hayamos pegado no influirán para nada en el resultado que salga. (Si hubiéramos hecho otras experiencias, habríamos planteado el principio de la probabilidad de otra manera.)

Que el dado caiga sobre una de sus seis caras no depende del número escrito en ella. A medida que vayan saliendo excepciones sistemáticas a la frecuencia relativa del valor de probabilidad calculado, podremos casi establecer el *postulado:* Se han de encontrar aún más causas, de modo que al añadirlas al sistema de las proposiciones que nos son conocidas, vaya apareciendo la probabilidad. Sólo quedaremos tranquilos cuando la frecuencia relativa coincida con la probabilidad *a priori.*

Las otras circunstancias que podamos introducir no deben tener el mismo carácter que las suposiciones ideadas *ad hoc.*

Ahora podemos tratar de fijar alguna base para la igualdad de probabilidades.[47]

Solamente se puede hablar de "todas las proposiciones" cuando se dispone de un *método* para construir esas proposiciones.

[47] Siguen un diagrama sobre rayos de luz y media página en blanco. Ver el "Prefacio de la edición alemana", pág. 25.

II

22 de marzo de 1930 (con Schlick)

[[La verificación y el dato inmediato]]

¿Cómo puedo comprobar la proposición: "Esto es amarillo"? En primer lugar, es claro que: "Esto" que es amarillo lo he de poder reconocer cuando sea rojo. (Si "esto" y "amarillo" constituyeran una unidad, se podrían representar mediante *un* símbolo y no tendríamos proposición.)

La representación "amarillo" no es una figura del amarillo que he visto, como puedo llevar —por ejemplo— una foto de mi amigo en la cartera. Se trata de una "imagen" en sentido formal completamente distinto. Puedo decir: "Imagínese un amarillo; haga que se vaya tornando blanquecino hasta que sea blanco del todo, y luego páselo a verde." Me es posible dirigir su representación y ésta irá cambiando, como podrían hacerlo las impresiones cromáticas de la realidad. Puedo efectuar con las representaciones las mismas operaciones que corresponden a la realidad. *La representación del color tiene la misma multiplicidad que el color;* en esto consiste su conexión con la realidad.

Si digo: "Esto es amarillo", lo puedo comprobar diversamente. Según el método que emplee en la verificación, tendrá la proposición distinto sentido. Si, por ejemplo, empleo una ecuación química como medio de verificación, tendrá sentido decir: "Esto parece *gris,* pero en realidad es *amarillo*". Si digo que basta como comprobación lo que veo, ya no tendrá sentido afirmar: "Esto parece amarillo, pero no lo es". Ya no me es dado buscar un *indicio* que me asegure que es amarillo, pues tengo el hecho mismo. He llegado al último punto, más allá del cual ya no puedo proceder. Con relación al dato inmediato no puedo formular *hipótesis.*

[[*Verificación y tiempo*]]

Lo mismo que sucede con el color, ocurre también con el tiempo. La palabra "tiempo" tiene también diversos significados: el

tiempo de mi recuerdo, el tiempo de las aserciones de otro hombre, el tiempo físico.

Mis recuerdos están en un orden. *El modo como los recuerdos están ordenados es el tiempo.* El tiempo se da, consiguientemente, en estrecha relación con los recuerdos. El tiempo es casi la forma en que tengo los recuerdos.

Un ordenamiento puede ser dispuesto de otro modo; por ejemplo, por aserciones que yo u otro hace. Si digo: "Este suceso acaeció antes y ese otro después", hay un orden totalmente distinto. Los dos tipos de ordenamiento se pueden conjuntar, v. gr., cuando hablo de un incendio de que oí contar en mi infancia. Aquí se sobreponen a la vez el tiempo del recuerdo y el tiempo de las aserciones. Más complicado se vuelve el asunto cuando entran por medio las aseveraciones de la historia o cuando se trata del tiempo de la geología. El sentido del dato sobre el tiempo depende, pues, de lo que se tome como verificación.

Probabilidad II

La "probabilidad" puede poseer dos significados totalmente distintos.

1. Probabilidad de un suceso;
2. Probabilidad de la inducción.*

En este último sentido significa el desasosiego *(Unbequemlichkeit)* que me produciría dejar la inducción.

Se trata de un hecho de experiencia: Si echo el dado cien veces y me sale el 1 una sola vez, lo echo luego noventa y nueve veces y no me sale el 1 ni una sola vez, diré: Ya es hora de que salga el uno; apuesto cualquier cosa a que ahora saldrá el 1. El cálculo de probabilidades dice que esa inferencia no es correcta. Pero yo creo que sí es correcta: Es muy "probable" que ahora aparezca el 1; aunque no sea probable en el sentido del cálculo de probabilidades, sino en el sentido de probabilidad de una inducción. Por la mezcolanza de estos dos conceptos sobre la probabilidad ocurre toda una serie de malentendidos. (Habrá tal tiempo, según se deduce de los cambios de temperatura, etc.)

Si aparece una irregularidad en el compartimiento, nos llama

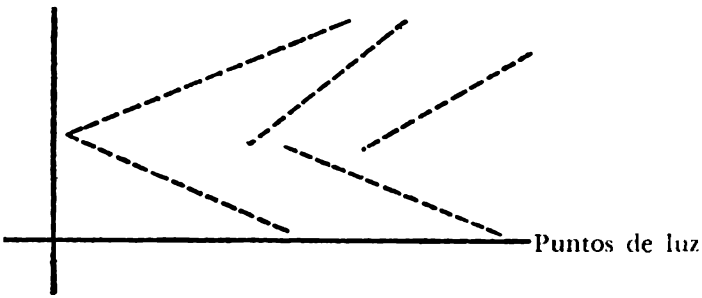
* He conservado el genitivo del original, en vez de traducir más cómodamente "por inducción". La probabilidad aquí no se refiere al resultado de la inducción, sino a la posibilidad de llevar a cabo esa inducción sirviéndose de la probabilidad. [T.]

la atención. En las máquinas para mezclar chocolate, almendras y pasas, todo el mundo espera que las almendras y pasas se hallen en su división; si no sucede así, la fábrica mandará revisar la máquina.

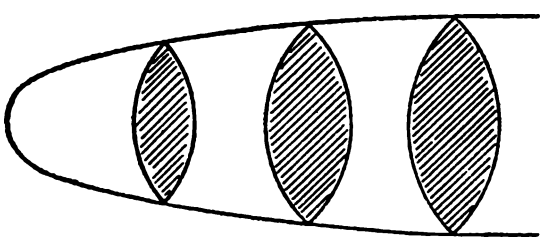
La probabilidad de la vida diaria significa la probabilidad de la inducción. Esta *no es mensurable,* al menos no lo es en el mismo sentido como lo es la probabilidad del cálculo de probabilidades.[1] [¿A lo mejor tampoco con número en el sentido usual?]

Hipótesis I

Diferencias entre "aserciones" e "hipótesis": La hipótesis no es una aserción, sino una ley para la formación de aserciones.



Lo que observamos son siempre solamente los "cortes" que hay por toda la formación conjunta que expresa la ley.



Una ley natural no se puede ni comprobar ni refutar. De la ley natural no se puede decir ni que sea verdadera ni que sea

1] Es lícito decir que una ley natural que se ha cumplido seguidamente es más plausible probablemente que otra, pero carecemos de parangón para expresar esta diferencia.

falsa, sino sólo que es "probable", y por "probable" se entiende aquí: sencillo, cómodo. Una aserción, en cambio, es verdadera o falsa, nunca probable. Lo que es probable no es aserción.

Sentido de las aserciones físicas: [1] Señalan hacia el futuro *ad infinitum*. Nunca valen como algo demostrado. Siempre se anda con cuidado respecto a abandonarlas o alterarlas, en contraposición a las auténticas aserciones, cuya verdad nunca más puede ser cambiada.

Doble significado de la geometría

La geometría del espacio visual es la gramática de las aserciones sobre los objetos del campo visual. No se puede decir: Esta geometría es aceptable.

La geometría del espacio físico, en cambio, es algo totalmente distinto. Se la puede convertir en algo aceptable (probable). Está al mismo nivel que las leyes de la naturaleza, y es parte de la descripción física y puede alterarse.

"Esta superficie es un cilindro", es una hipótesis.

[[*Varia sobre hipótesis*]]

Si encuentro un huevo parduzco y digo: "Este huevo procede de una alondra", esa aserción no es verif[[icable]]. Más bien estoy estableciendo una hipótesis acerca del ave que lo puso.

En la hipótesis ocurre la inducción *matemática*. Conexión con el sistema espaciotemporal con las matemáticas.

Lógica de la hipótesis:[2] ¿Qué quiere decir que dos hipótesis se contradicen? La contradicción entre dos proposiciones hace referencia (se retrotrae) a la contradicción entre aserciones que son su resultado.

Sólo se entiende una ecuación física cuando se conoce el método de proyección que subordina proposiciones a los números. Las ecuaciones se reducen a un sistema de proposiciones en que aparecen números.

S = 2 W; S se reduce a una proposición, lo mismo que W.

La física construye un sistema de hipótesis que se expresan

1] El sentido de una aserción física no queda agotado en la observación.

2] Si la geometría es contradictoria significa que conduce a la exposición de aserciones que son contradicciones (lógicas).

como un sistema de ecuaciones. Las ecuaciones de la física no pueden ser ni verdaderas ni falsas. Verdaderos o falsos son solamente los resultados derivados de la verificación, esto es: las aserciones fen[[omenológicas]]. *La física no es historia.* La física profetiza. Si se quisiera concebir la física escuetamente como un informe sobre los hechos observados hasta el presente, se la privaría de lo que le es esencial, su referencia al futuro. Se convertiría en algo como la narración de un sueño.

Las aserciones de la física nunca están cerradas. Sería un sinsentido considerarlas cerradas.

Si saliera de la casa y viera que estoy en la Ringstrasse.[48] * ¿Qué haría?

La hipótesis como postulado. Convención.

El señor Waismann y su hermano.[49] Diría, por ejemplo: No es el señor Waismann, sino su hermano que se le parece mucho.

[48] Ni el domicilio de Schlick ni el solar de Wittgenstein se hallaban en la Ringstrasse al tiempo de esta conversación.

[49] Waismann no tenía hermano.

* El Ring, en Viena, es un complejo de bulevares emplazado donde se ubicaban las fortificaciones. [T.]

III

19 de junio de 1930 (con Schlick)

[[Lo que se tenía que haber dicho en Königsberg]]

Wittgenstein explica lo que se debería haber dicho en Königsberg: [50] En lógica no se dan conceptos; lo que parezca un concepto es como un capítulo demás en gramática. Cuando, por ejemplo, se habla de diferentes tipos de números, no se está frente a diversos conceptos. No tenemos un concepto del número que se divida en distintos subconceptos. Los números no se dividen en subclases. Más bien nos hallamos ante diversos tipos de palabras, algo así como cuando la gramática distingue substantivos, adjetivos, verbos, etc. Pero como entre la sintaxis de los distintos tipos de números existen ciertos parecidos, por esto a todo se les llama números.

Una clase no puede ser ni finita ni infinita. Las palabras "finito" e "infinito" no añaden nada a "clase", pues no son adjetivos.

En lógica no hay el objeto y la descripción del objeto. Se acostumbra a decir, por ejemplo: "No podemos contar todos los números de una multitud, pero nos es dado hacer una descripción." Esto es un sinsentido. No se puede dar una descripción en lugar de un cálculo; una cosa no es sustitutivo de la otra. Lo que podemos dar, lo podemos dar de todas maneras. No podemos llegar al mismo fin desde atrás.

Con el concepto de función de Dirichlet [51] empieza la teoría de la cantidad. Aquí se toma la función como un ordenamiento. Cuando se trata de un ordenamiento, generalmente nos servimos de una lista. Cuando se acaba la lista, se da una ley.

50 Véase "Prefacio de la edición alemana", pág. 16.

51 Ordinariamente se atribuye a P. Lejeune-Dirichlet la primera formulación del concepto general de una función de variables reales (ver: *Werke,* tomo I, Berlín, 1889, págs. 132 y 135). La formulación del concepto de Dirichlet realizada por H. Hankels *(Mathematische Annalen* XX, 1882, página 67) dice: "Una función se llama *y* de *x* cuando a cada valor de la magnitud cambiable de *x*, dentro de determinado intervalo, corresponde un determinado valor de *y*, ora dependa *y* en todo el intervalo de *x* según la misma regla, o no; ora esa dependencia se pueda expresar por medio de operaciones matemáticas, o no."

Pero la ley no es otro modo de dar lo que la lista estaba dando. Lo que da la ley no lo *puede* dar la lista. Ya no hay que pensar más en listas, pues tenemos ante nosotros dos cosas absolutamente distintas. Sin embargo, procedemos como si una cosa fuera método indirecto de la otra, como si dijera: Podría seguir diciendo la lista, pero como sería demasiado complicado o estaría más allá de mis posibilidades, daré la ley. Suena como cuando digo: Ahora puedo hablar con ustedes, pero cuando esté en Inglaterra no me quedará más remedio que tenerles que escribir.

No hay nada más sospechoso que una generalidad demasiado grande. Dedekind, al dar la definición de infinito, hizo como si no supiera que todavía estaba tratando con *números*.[52] ¡A lo mejor quería hacerla servir también para leones! Todo esto no tiene sentido. Así que se debe poner en claro que uno no se puede preparar para una forma lógica. No se pueden estudiar las propiedades de una forma y pensar: Si nos encontramos con una forma así, ya estamos preparados.

Formalismo

Referente al formalismo hay algo correcto y algo equivocado.

La verdad sobre el formalismo es que permite tomar toda sintaxis como un sistema de reglas de juego. Me he puesto a reflexionar que Weyl podría haber dicho esto cuando afirma que el formalismo toma los axiomas de las matemáticas como reglas de ajedrez.[53] Yo, pues, añadiría: No sólo son arbitrarios los axiomas de las matemáticas, sino toda sintaxis.

En Cambridge me preguntaron si era que creía que las matemáticas tenían que ver con los trazos sobre el papel;[54] a lo que respondí: Exactamente en el mismo sentido como el juego del ajedrez tiene que ver con las figuras. El juego del ajedrez no consiste en mover trebejos de madera, como si me dijera: "Ahora me voy a fabricar una reina con ojos de espanto para que haga correr a todas las demás piezas fuera del tablero."

52 Véase la nota 21 de la pág. 62.

53 *Symposion* I (1927), pág. 25.

54 Durante el trimestre de mayo de 1930, según pude ver en los apuntes para las lecciones de G. E. Moore, que me prestaron amablemente la señora Dorothy Moore y el señor C. Lewy. "*Objeción* a: 'El cálculo es un juego': ¿Es un juego con tinta y papel? No. Pero también: La esencia del ajedrez no son las figuras de madera. Lo que es característico del ajedrez es la multiplicidad lógica de sus reglas. [[etc.]]"

Se echarían todos a reír. No importa el aspecto que tenga un peón, pues es el conjunto de reglas del juego quien da su lugar lógico al peón. El peón es una variable, como lo es la "x" en lógica.

Es claro que el juego del ajedrez no consiste en los movimientos. Los movimientos sobre el tablero no son los movimientos de la física. Cuando digo: "El caballo sólo *puede moverse* a saltos terciados, el alfil sólo en sesgo y la torre en línea recta", la palabra *puede* significa la posibilidad gramatical. Lo que va contra las reglas es contravención de la sintaxis.

Si alguien me preguntara: ¿En qué se diferencia la sintaxis de una lengua, del juego del ajedrez?, le respondería: En su empleo y sólo en eso. Podríamos establecer la sintaxis de una lengua, sin saber si alguien la iba a usar jamás. (Números hipercomplejos.) Lo único que se puede decir es que: La sintaxis no se puede emplear más que en aquello en que se puede emplear. Si hubiera hombres en Marte y se hicieran la guerra como las piezas del ajedrez, el Estado Mayor podría emplear las reglas del ajedrez como profecías. Se convertiría en cuestión científica saber si será al cabo de una constelación de jugadas cuando se dará mate al rey, o si bastarán tres tiradas, etc.

Lo esencial es: La sintaxis no se puede justificar por el lenguaje. Si pinto *su retrato* y lo represento a usted con bigote negro, podría responderle a su pregunta sobre por qué lo he pintado con bigote: Mírese usted; verá que lleva bigote negro.[55] Si me pregunta, por el contrario, *por qué* empleo una sintaxis determinada, no le podré responder nada como justificación. La sintaxis no tiene fundamentos; por esto es arbitraria. Independientemente de su empleo y considerada en sí, es un juego; exactamente como el juego del ajedrez.

Esto es, por consiguiente, lo correcto del formalismo. *Frege* se ha revuelto con razón contra el concepto de que los números de la aritmética son los signos.[56] El signo "0" no tiene la propiedad de que al serle añadido el signo "1" da el signo "1". En esa crítica tenía razón Frege. Pero no vio que en el formalismo había otra cosa que estaba correcta: que los símbolos de las matemáticas no son los signos y que no tienen significado. Frege se planteó así la alternativa: O tenemos que habérnoslas con los trazos de tinta del papel, o esos trazos son signos *de algo* y eso que ellos representan es su significado. Esa alter-

[55] Waismann llevaba bigote negro.

[56] *Grundgesetze der Arithmetik* II, Jena, 1903, §§ 88-137.

nativa no está correcta, como se muestra por el juego del ajedrez: No nos las tenemos que haber con las figuras, ni representan nada (en el sentido de Frege, no tienen significado). Hay una tercera cosa y es que los signos se pueden emplear como en el juego. Si en el juego del ajedrez se quisiera hablar de "significación" sería lo más natural decir: El significado del juego del ajedrez es lo que todos los juegos de ajedrez tienen en común.

Si en geometría construimos una figura, tampoco nos las tenemos que haber con las líneas y el papel. Los trazos son lo mismo que en aritmética los signos y en el ajedrez las figuras. Lo esencial son las reglas que rigen esas formaciones, o mejor dicho, no son lo "esencial", sino aquello que de ellas me interesa.

Ecuación y tautología I

Cuando se termine toda la disputa, creo que las matemáticas tomarán el aspecto que tienen en la enseñanza elemental, donde se trabaja con la máquina de cálculo rusa.[56a] * El método que se sigue en la escuela elemental en matemáticas es absolutamente riguroso y exacto, y no necesita perfeccionarse en modo alguno. Las matemáticas son siempre una máquina, un cálculo. El cálculo no describe nada y se puede emplear en aquello en que se puede emplear. Sólo se puede contar lo que se puede contar, y al efecto sirven los resultados del cálculo.

Fácilmente se puede llegar a la creencia de que la expresión de una ecuación es una tautología; que, *v. gr.*, 28 + 16 = 44 se podría escribir de la siguiente manera:

$$(\text{E}28x)\,\varphi x.\,(\text{E}16x)\,\psi x.\text{Ind.}:\supset:(\text{E}44x)\,\varphi x\,v\psi x$$

Esta expresión es una tautología. Pero para hallar el número del lado derecho, que ha convertido la expresión en tautológica, se ha precisado efectuar un cálculo, y ese cálculo es totalmente independiente de la tautología. La tautología es el em-

[56a] Siendo maestro de escuela elemental, Wittgenstein apreció mucho la máquina de calcular rusa, aunque fuera mirada con reparo por la "reforma escolar" que entonces se estaba introduciendo.

* Hasta el siglo XVII en toda Europa se usó el ábaco en la enseñanza de la aritmética y luego fue sustituido, en gran parte de ella, por el cálculo mental o escrito. En Rusia se empleó el aparato llamado *chotki* (rosario), que pasó también a la Europa Occidental, traído por Poncelet, quien fue prisionero de los rusos desde 1812 a 1814. [T.]

pleo del cálculo, no su expresión. El cálculo es un ábaco, una tabla de cuentas, una calculadora, algo que trabaja con trazos, cifras, etc., y se puede emplear ese cálculo para construir una tautología, pero ello no quiere decir que el cálculo tenga que ver con proposiciones y tautologías.

En realidad, todos en la escuela hemos calculado con números, por lo demás con bastante exactitud, sin tener idea de lo que era una tautología. Luego, la esencia del cálculo no tiene que ver con la tautología.

Añadiré que a este respecto existen dos concepciones. Russell cree en *Principia Mathematica* que sus proposiciones lógicas dicen algo, que describen algo. En esa suposición es comprensible que opine que es la tautología lo que expresa el sentido de la ecuación 28 + 16 = 44. Pero si ahora pasamos a la otra concepción, que afirma que las proposiciones lógicas son tautologías y nada dicen, se verá que es totalmente inconsecuente mantener que es la tautología lo que expresa que 28 + 16 = 44.

En un cierto sentido, la ecuación matemática se parece más a una proposición empírica que a una tautología. Esto es, se parece a aquello que *muestra* la tautología.

25 de septiembre de 1930 [57]

[[VARIA]]

Parece como si se pudiera decir que solamente el presente posee realidad. Pero inmediatamente se ha de preguntar: ¿En contraposición a qué? ¿Quiere esto decir que no ha existido mi madre o que esta mañana no me he levantado? A todas vistas no se intenta decir semejante cosa. ¿Se querrá decir que los sucesos de los que he perdido la memoria no han existido? Tampoco se indica esto.

El momento actual, de que tratamos aquí, quiere indicar algo que no está *en* un espacio, sino que él mismo constituye un espacio.

Parece haber algo que no es generalidad, sino *síntoma* de generalidad; así, cuando *v. gr.* digo: "Si ves iluminada la ventana, es

[57] Fecha sin lugar. Hasta el próximo encabezado ha escrito el estenógrafo por ambos lados. Al final hay un vacío de media página. Véase el "Prefacio de la edición alemana", págs. 24-25.

señal de que estoy en casa". La ventana iluminada no tiene la multiplicidad de la generalidad.

No creo que sea correcto afirmar que toda proposición deba ser compuesta[58] en sentido literal. ¿Qué pasaría si "ámbulo" sólo constara de la sílaba radical? Lo que sucede es que toda proposición es un caso del juego, correspondiente a una regla general para formación de signos.

Puedo preguntar: ¿Fue un trueno o un cañonazo? Pero no: ¿Fue un ruido? Puedo también decir: "Averigua si esto es un círculo o una elipse". Aquí se podría presentar la objeción de que la palabra "esto" tendrá significado diferente si la proposición es verdadera o si es falsa.

Es claro que la palabra "esto" ha de tener un significado fijo, resulte verdadera o falsa la proposición. Si puedo decir: "Esto es un círculo", también ha de tener sentido decir: "Esto es una elipse."

Puedo decir: "Limpia la mesa", mas no: "Limpia todos los puntos."

Cuando digo: "La mesa es marrón", tiene sentido relacionar la propiedad "marrón" con un portador, la mesa. Si me puedo imaginar la mesa de color marrón, también la puedo idear de cualquier otro color. ¿Qué quiere decir que puedo representarme *el mismo* círculo de color rojo o verde? ¿Qué es lo que permanece igual? La forma del círculo; pero ésta no me la puedo representar sola.

"Esta proposición tiene sentido" es una expresión infeliz. "Esta proposición tiene sentido" suena como: "Este hombre tiene sombrero."

Sin embargo: "Estos signos designan una proposición", equivale a: "Reforzamos la forma de la proposición con signos."

En la proposición reforzamos también la forma de la realidad. [F.W.]

Si sé que estos signos designan una proposición, no puedo preguntar: ¿qué proposición?

58 *TLP* 4,032: "...(También la proposición 'ámbulo' es compuesta, pues su raíz tiene otro sentido si acaba con otra terminación, o si su terminación se une a otra raíz)."

La variable [59]

En la demostración de Euler [60] está mal escribir los números primos en la forma p_1, p_2, ... p_n, pues si el subíndice n significa *algún* número, se presupone la ley de la continuidad y esa ley solamente se puede dar en la inducción. Pero se supone que la demostración tiene que demostrar.

¿Qué significa una variable? ¿Cómo puedo diferenciar el signo de una variable del de algo desconocido?

El signo de una variable solamente puede significar una variable si existen reglas para la sustitución del signo por números. Que una variable puede recorrer todos los números naturales queda manifiesto en el hecho de que las reglas para su aplicación tienen la forma de la inducción.

La demostración

La demostración no es un vehículo para llegar a algún lugar, sino la cosa misma. Puedo decir: "Hasta tal lugar iré en tren, y luego caminaré hasta X." En ese caso poseemos dos vehículos para lo mismo, esto es, para el recorrido.

Por el contrario, no pueden llevar a lo mismo dos demostraciones diversas. Pues o esas dos demostraciones se encontrarán, como dos caminos que llevan al mismo sitio, o demuestran cosas distintas: A diversidad de demostraciones corresponde diversidad de lo demostrado.[1]

Números reales II

Solamente se puede hablar de un número real cuando se tiene. Si en el caso de debernos limitar a fracciones decimales formadas regularmente, se nos dijera que una cantidad de esas fracciones ha caído bajo la mesa, podríamos preguntar: ¿Cuáles, pues? Deme una de ellas. Una prueba para "todos los números reales" es algo totalmente distinto de una prueba para todos los números naturales.

1] Prueba de que dos demostraciones demuestran lo mismo es que se pueda transformar una en otra.

[59] De nuevo aquí Waismann vuelve a su costumbre de escribir el encabezamiento en el anverso de la hoja.

[60] Compárese: L. Euler, *Variae Observationes circa series infinitas*, 1744, Theorema VII, y H. Hasse, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Berlín, 1964. páginas 192-93.

Además: No se puede demostrar en primer lugar que una proposición vale para los números naturales y posteriormente descubrir que también sirve para un ámbito mayor, pues entonces se tiene ya otra proposición totalmente distinta.

Si indicamos que una proposición sirve para todos los números reales, venimos a decir que sabemos por inducción que la proposición sirve para todos los números racionales; a lo que hay que añadir que si, *v. gr.*, la variable indica $\sqrt{2}$, interpretaremos la proposición en el sentido de que vale hasta ese límite.

La demostración para todos los números reales no mantiene analogía con la demostración para todos los números racionales, de modo que se pudiera decir: Lo que se ha demostrado para todos los números racionales —desde luego por inducción— se puede demostrar del *mismo modo,* aunque ampliando el proceso de la demostración, para todos los números reales.[1]

1] No es pues, que primero demuestre la proposición para números racionales y luego la extienda, por analogía, a números reales. La demostración para números reales no mantiene analogía con la demostración para números racionales sino que indica algo bastante diferente.

La demostración para los números reales no es la continuación de la demostración para números racionales, sino que es algo muy diverso.

Si tenemos algún número real y vale también esto para él, no será debido a la inducción, sino a las reglas de cálculo que he establecido al contar con números reales.

Tal fórmula no significa por tanto: Para todos los números reales vale esto, sino: Cuando tenemos un número real, entonces puedo interpretar la fórmula como si significara: Hasta el límite es esto lo que vale, y lo demuestro a base de reglas de cálculo que ya han sido fijadas para los números reales.

La cosa, por consiguiente, está así: Pienso un *determinado* número real y lo mantengo fijo durante la demostración. Mas esto cambia mucho si se trata de números racionales, pues en tal caso hay que ver si la fórmula todavía sirve mientras van variando los números racionales, *por lo que* la demostración tendría carácter de inducción. Pero en lo que vamos tratando no se presenta la cuestión de si vale la fórmula para "todos los números reales", pues no dejamos que varíen los números reales.

No demostramos: *Tómese* como se tome la serie r_1, r_2, $\ldots r_n \ldots$, es esto lo que vale.

La demostración para números reales no debe tomarse en modo alguno como demostración para números racionales. Sólo en este último caso es posible llevar a cabo la demostración a través de la inducción, lo que aparenta como si la demostración se pudiera aplicar a algo que está fuera de su ámbito.

Esto naturalmente es absurdo, puesto que la demostración debe contener todo lo que indica.

La demostración para todos los números reales no es una forma abreviada de algo que se pudiera demostrar también más prolijamente. Lo extra que entre todavía en la demostración de los números racionales no es un analogón * de la inducción.

No permitimos que los números reales variables recorran todos los valores —esto es, todas las leyes—.

Solamente nos atenemos a las reglas de cálculo, de manera exclusiva.

Si una fórmula vale para un número natural, no sé por ello todavía si vale también para otro, y tengo que demostrarlo.

Variable n de los números naturales:

$$F(n) \xrightarrow{\text{Demostración}} \text{Fórmula básica} \longrightarrow \text{Inducción}$$

Variable ρ de los números reales:

$$F(\rho) \xrightarrow{\text{Demostración}} \text{Fórmula básica} \longrightarrow \text{Reglas de cálculo para números reales}$$

Si demuestro que la fórmula vale para los números reales, es porque he deducido todo de las reglas de cálculo establecidas para los números reales. *Demuestro por inducción la fórmula para números reales, y luego muestro que cabe emplearla con los números racionales, y esto en base a las reglas de cálculo que he establecido para los números reales;* pero no demuestro que la fórmula valga para "todos los números reales", precisamente porque las reglas de cálculo para los números reales no tienen la forma de la inducción.

* Analogón: Arcaísmo por (término) análogo. [T.]

"Luego, la proposición vale para todos los números." De nuevo, hay que decir: No existe tal "luego". La demostración lo La demostración de los números reales no está en deuda con nadie.

Supongamos, por ejemplo, que he demostrado la fórmula $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ para los valores racionales de m, n, y esto por inducción, y que ahora quisiera demostrarla para los valores de los números reales. ¿Cómo procederé? A todas vistas, no es posible llevar a cabo la demostración por inducción.

La idea de que vale la proposición de "todos los números reales", los conozca o no, está equivocada; en realidad solamente puedo hablar de un número real cuando lo tengo, y sólo puedo darle a la proposición un significado *si* conozco el número real.

No se puede pensar: La proposición vale para todos los números racionales, y a continuación mostrar que también vale para todos los números reales. Cuanto se añada no es una demostración adjunta.

Cuanto se añada a la demostración no es como una segunda parte de ella, comparable a la inducción. Esta segunda parte tiene otro carácter muy distinto: Es una interpretación.
Si, pues, se establece una fórmula para números reales, hay en ella una prueba y una interpretación.

La fórmula se ha de entender así: Si se me da un número real, es esto solo lo que vale.

Una fórmula que se ha demostrado para números reales no viene a decir: Para todos los números reales vale... sino que dice: Si tenemos un número real, entonces vale...

Y esto no en base a una demostración, sino fundándonos en una interpretación.

¿No se puede acaso afirmar lo mismo de las fórmulas para números naturales? No. Ésta es la diferencia: La demostración consiste en una inducción.

---

es todo y no solamente un vehículo. La demostración demuestra sólo lo que demuestra; lo demás es añadidura.

Si se dijera: Propiamente la proposición debería ser demostrada para todos los números reales, pero nos conformaremos con una insinuación. Esto no es verdad. Nuestra demostración para los números reales no da más de sí. Esa demostración no es como una abreviatura de algo que se podría demostrar con más prolijidad, sino que procede sencillamente de las reglas de cálculo que hemos establecido para los números reales.

Idealización

¿Qué significa la idealización? ¿Se cambia algo si me pongo a idealizar? ¿Cambio algo idealizando?

En lógica no existe el objeto y la descripción del mismo. Si hablo de 9^{9^9} cosas, puedo expresar el número con servirme de la estructura de las operaciones.

No tengo que preocuparme de si en realidad existe una cantidad que contenga 9^{9^9} individuos. Ya al lanzar semejante cuestión presupongo el ser previo del número.

Si se pretendiera afirmar: Las matemáticas consisten en idealizar la realidad, sus propiedades, relaciones, etc., cabría preguntar antes: ¿Y qué consigo cambiar idealizando?

Interpretación

¿Qué es la interpretación? O es algo sin ser, algo que por ejemplo depende de mi estado de ánimo, y entonces cabe decir que toda interpretación es superflua y que no puede ser ni verdadera ni falsa; o está estrechamente relacionada con las matemáticas. ¿En qué consiste, pues? La interpretación no puede consistir en proposiciones, sino —de nuevo— en reglas: Se introducen una vez más las reglas de cálculo en determinado ámbito, en una situación sintáctica más amplia.

Si quisiéramos interpretar el cálculo de Russell, se vería claro que el signo "infinito" o "$\aleph_0$" no encaja en el conjunto para el que fue ideado, pues inmediatamente resulta un sinsentido.[61]

Es decir, que la sintaxis de la palabra "infinito" es diferente de la sintaxis del signo de Russell para infinito.

El cálculo en cuanto tal está bien, pero no rinde lo que Russell creyó que rendiría en su exposición. Russell, al idear su cálculo, no tenía naturalmente la intención de desarrollar un juego de ajedrez, sino ofrecer —mediante ese cálculo— qué era lo que realmente significaba la palabra "infinito" en su uso. Fue en esto en lo que se equivocó.

El cálculo se puede emplear en todo lo que es empleable. (Pero no se puede decir más.)

La interpretación inmiscuye al cálculo en un conjunto diverso y totalmente falso de reglas sintácticas.

[61] Este número fue introducido por Whitehead y Russell en *Principia Mathematica* II, Cambridge, 1912, págs. 268 *ss.*

La aserción: "Si buscas durante un tiempo suficientemente grande darás a buen seguro con un número" carece de significado. No se puede buscar en lo infinito.

En lógica no se da algo general y algo especial.[62]

[62] Comparar: *TLP* 5,454. (En lógica no hay un estar uno junto al otro; no puede darse clasificación. En lógica no puede darse un más general y un más especial.)

IV

Miércoles, 17 de diciembre de 1930 (Neuwaldegg [62a])

Sobre la ética de Schlick

Dice Schlick que en la ética teológica existen dos conceptos sobre la esencia del bien: según la interpretación más superficial, el bien lo es porque Dios así lo quiere; según la más profunda, Dios quiere el bien porque lo es.[63] Encuentro que el primer concepto es el más profundo: es bueno lo que Dios manda. Este concepto zanja el camino a cualquier otra explicación que se quiera dar sobre "por qué" el bien lo es; mientras que el segundo concepto es el superficial y racionalista, porque procede "como si" aquello que es el bien todavía se pudiera fundamentar.

El primer concepto nos dice claramente que el ser del bien no tiene que ver con los hechos y que, por ende, no se puede aclarar mediante proposición alguna. Si alguna proposición hay que aclara justamente lo que quiero indicar es ésta: Es bueno lo que Dios manda.

El valor [63a]

Cuando describo la realidad, describo lo que encuentro entre los hombres. La sociología ha de tratar tanto de nuestras accio-

62a En un arrabal de Viena. Ocasionalmente habitaba allí la familia de Wittgenstein. Véase el "Prefacio de la edición alemana", págs. 19-20.

63 *Fragen der Ethik*, Viena, 1930, pág. 9. "Esta es la interpretación profunda" escribió Wittgenstein en el lugar correspondiente, al margen, de su ejemplar del libro. En la versión inglesa, en parte revisada por Schlick, se traduce "die flachere Deutung... die tiefere Deutung" (la interpretación más superficial... la interpretación más profunda) por: "one interpretation... another, perhaps profounder, interpretation" *(Problems of Ethics*, Nueva York, 1939, pág. 11).

63a Al parecer, también esta sección proviene de una discusión sobre el libro de Schlick; compárese el parágrafo 9 "Die Ethik als Tatsachenwissenschaft" ("La ética como ciencia de los hechos") *(op. cit.*, págs. 14 *ss.*; 20 *ss.* de la trad.): "Lo que pasa como últimas normas o valores supremos debe haber sido tomado de la naturaleza humana y de la vida como un hecho. Consiguientemente, no puede haber jamás contraposición entre un resultado de la ética y la vida... Si ocurre contradicción es indicio de que el moralista ha entendido mal su tarea y, por tanto, no la

nes y valoraciones, como de las de los negros. Pero sólo se ha de limitar a narrar lo que ocurre, sin que deba aparecer en la descripción del sociólogo la proposición: "Esto y aquello representa un progreso".

Lo que puedo describir es lo que es preferido: Suponga que a fuerza de experiencia hubiera descubierto que usted prefiere los cuadros que contienen algo de verde, los que tienen alguna tonalidad verde, etc. Sólo podré describir *esto,* pero no que el cuadro preferido por usted sea el más valioso.

¿Qué es lo valioso en una sonata de Beethoven? ¿La sucesión de tonos? No, pues es solamente una sucesión entre otras. Pero también afirmo: Incluso los sentimientos que tenía Beethoven cuando estaba componiendo la sonata no eran más valiosos que cualquier otro sentimiento. Tanto menos, pues, la preferencia es algo valioso en sí.

¿Es el valor un determinado estado de ánimo o una forma que se adhiere a algún dato de conciencia?[63b] Yo respondería: Cualquier explicación que se me quiera aducir, la rechazaré siempre, y no porque tenga que ser falsa, sino porque es una *explicación.*

Si alguna me hablara de determinada *teoría,* podría decirle: No, no, no me interesa. Aunque la teoría fuera verdadera, podría no interesarme, pues a lo mejor no sería *lo* que yo buscara.

Lo ético no se puede enseñar. Si mediante alguna teoría pretendiera explicar a otro en qué consiste la esencia de lo ético, lo ético carecería de valor.[63c]

En mi conferencia sobre ética, al final hablé en primera persona:[64] Creo que esto es algo muy esencial, porque nada de

ha cumplido [Wittgenstein comenta al margen: "¡Qué raro que ocurra ese malentendido!"], quizás se ha convertido en moralista sin darse cuenta, o quizás no se sienta a gusto en su papel de conocedor y quisiera más bien ser hacedor de valores morales." [Wittgenstein: "Pero, ¿cómo se podría ser hacedor, en todo caso? ¿No se ha dicho que un hacedor en ese sentido sólo afirmaría algo?"]

63b Schlick, *op. cit.*: "Los últimos valores son hechos existentes en la realidad de la conciencia humana, e incluso si la ética fuera una ciencia normativa, no cesaría de ser, por esto, una ciencia de los *hechos.*"

63c En sus *MsBd,* escribió Wittgenstein el 15 de noviembre de 1929: "No se puede conducir a los hombres al bien, sino solamente llevarlos a alguna parte. El bien está fuera del espacio de los hechos."

64 Quizás Wittgenstein no hace alusión aquí a su relato de sus propias experiencias "éticas" *(LE,* págs. 7 *ss.),* sino a sus anotaciones finales *(ibid.,* págs. 11 *s.),* donde rechaza la opinión de que alguna vez se pueda dar con un análisis correcto de las aserciones éticas y religiosas, que él explicaría como aserciones de hechos: "Now when this is urged against me

todo esto se puede comprobar y yo solamente puedo presentarme como personalidad y hablar en primera persona.

Para mí, la teoría carece de valor; la teoría no me da nada.

La religión

¿Es esencial el habla para la religión? Me puedo imaginar muy bien una religión en que no existan dogmas y en la que, por tanto, no se hable. El ser de la religión puede no tener nada que ver con que se hable; o mejor: si se habla es que se trata de un componente de la acción religiosa y no de teorías, independientemente de si las palabras son verdaderas, falsas o carentes de sentido.

Las hablas de la religión no son *símiles,* pues si lo fueran se podrían decir en prosa. ¿Es correr contra las barreras del lenguaje? El lenguaje no es una jaula.[65]

Sólo puedo decir que no me burlo de esa tendencia de los hombres; antes bien que me quito el sombrero. Aquí es esencial que no se trate de una descripción de la sociología, sino que hable *de mí propio.*

Los hechos no tienen importancia para mí, pero me interesa saber qué entienden los hombres al decir que *"el mundo está ahí".*[66]

WAISMANN pregunta a WITTGENSTEIN: ¿Está en conexión el estar-ahí del mundo con lo ético?

WITTGENSTEIN: Que existe conexión lo han percibido los hombres y lo han expresado de esta manera: Dios Padre hizo el mundo, Dios Hijo (o la Palabra, lo que sale de Dios) es lo ético. Que se divida la divinidad para luego volverla a unir significa que existe aquí una conexión.

I at once see clearly, as it were in a flash of light, not only that no description that I can think of would do to describe what I mean by absolute value, but that I would reject every significant description that anybody could possibly suggest, *ab initio,* on the ground of its significance. &c." ("Ahora que se me insta a este respecto, he visto claramente en un momento, como si fuera en un destello de luz, no sólo que no habría descripción alguna, que pueda yo imaginar, que lograra describir lo que entiendo por valor absoluto, sino que hasta rechazaría cualquier descripción con sentido que quienquiera me sugiriera, *ab initio,* precisamente por ser consentido. Etc.")

[65] *LE,* pág. 12. •

[66] *LE,* pág. 8.

• Ver arriba, pág. 61, sobre Heidegger. [T.]

¿Qué quiere decir la palabra "deber"? Un niño debe hacer esto, quiere decir: si no lo hace va a tener estos inconvenientes.

Premio y castigo. Lo esencial a ese respecto es: que otro es inducido a hacer algo. Un deber sólo tiene sentido, por tanto, cuando tras él hay algo que le da apoyo, una fuerza que castiga o premia. El deber como tal carece de sentido.[67] "Es difícil predicar la moral, pero fundamentarla es imposible." [68]

INCONTRADICTORIEDAD II

He leído un trabajo de Hilbert sobre la incontradictoriedad.[69] Se me antoja que toda esta cuestión está mal planteada. Me pregunto, pues: *¿Pueden* ser contradictorias las matemáticas?

Me gustaría interrogar a la gente: ¿Qué dicen ustedes, creen realmente que existan contradicciones en matemáticas?

Los axiomas tienen dos acepciones, como muy bien ha visto Frege: [70]

1. Como reglas según las cuales se juega.
2. Como disposición de salida para el juego.

Si se toman en ese segundo sentido, no logro ver que sean contradictorios. En efecto, sonaría raro decir: Tal disposición de las figuras *(v. gr.* en el juego formular de Hilbert "o $\neq$ o")

[67] Compárese: *TLP* 6,422. (El primer pensamiento ante una ley ética de la forma "tú debes..." es: ¿Y si no lo hago? Es claro que la ética no tiene que ver con el castigo o el premio en el sentido acostumbrado. Por tanto, la pregunta referente a las *consecuencias* de una acción debe ser irrelevante... debe haber una especie de premio y castigo éticos, pero han de estar en la acción misma.)

También Schlick rechazó el concepto "el deber absoluto", por motivos parecidos. *(Op. cit.,* págs. 81 *ss.;* en la traducción, págs. 110 *ss.)*

[68] "Predicar la moral es fácil, pero fundamentarla es difícil", Schopenhauer, *Ueber den Willen der Natur,* pág. 140. *(La ciudad de las mujeres.)*

[69] "o $\neq$ o" se presenta como símbolo de la contradicción en "Ueber das Unendliche" (1925) y en "Grundlagen der Mathematik" (1927), *Grudlagen der Geometrie,* Leipzig, 1930, Apéndices VIII y IX.

Pero la indicación se remonta probablemente a 1922 en "Neubegründung der Mathematik", donde Hilbert habla de "una metamatemática que sirva para asegurar la matemática" *(Gesammelte Abhandlungen* III, Berlín, 1935, especialmente, pág. 175). Pero ahí su contradicción típica viene representada como "a $\neq$ a".

[70] Comparar, v. gr. con *Grundgesetze der Arithmetik* II, Jena, 1903, parágrafo 109.

es una contradicción. Si digo que una disposición es contradictoria, ello no es algo que ataña esencialmente al juego *en cuanto juego*, pues si oriento las reglas de manera que esa disposición no tenga que aparecer, se ha formado otro juego. Ahora bien, el juego es juego y no puedo entender por qué se le da tanta importancia a si aparece tal figura, como si determinada posición fuera "tabú".

Pero aun así sigo preguntando: ¿Y qué pasaría si apareciera la figura? [1]

El asunto cambia de aspecto, sin embargo, en cuanto los axiomas se toman como reglas *según* las cuales se juega. En cierto sentido, las reglas son aserciones que vienen a decir: Puedes hacer esto y no aquello. Pero dos reglas pueden contradecirse. Imaginen que en el ajedrez hubiera una regla que estipulara: En determinadas condiciones debe jugarse tal pieza, y otra regla ordenara: El caballo no puede moverse. Si en ese caso la pieza fuera el caballo, habría contradicción en las reglas y no se sabría cómo proceder. ¿Qué se debería hacer en tal caso? Muy sencillo: Asentar nueva regla para que el conflicto pudiera resolverse.

Y ahora digo: Si entre las reglas de juego de las matemáticas surgieran contradicciones, sería la cosa más sencilla del mundo ponerles remedio: No tendríamos más que buscar nueva directriz para el caso de que ocurriera contradicción entre las reglas, y así se arreglaría todo.

A este propósito debo hacer una observación muy importante: Una contradicción es solamente contradicción *cuando está ahí*. Se tiene la idea de que de todas formas, ya desde el principio, en los axiomas tiene que haber escondida alguna contradicción, aunque nadie la haya visto, como sucede con la tuberculosis: No se sospecha nada y un día uno se muere. De modo parecido, se teme: Cualquier día puede aparecer la contradicción latente y esto será una catástrofe.

Quiero decir: Preguntar si *alguna vez* las inferencias nos pueden llevar a una contradicción carece de sentido, mientras no se me dé un procedimiento para hallar la contradicción.

Mientras puedo jugar, puedo jugar, y todo va bien.

En realidad el asunto está así: El cálculo como cálculo está en perfecto orden y no tiene sentido hablar de contradicciones. Lo que se llama contradicción surge cuando uno sale del cálcu-

---

1] ¿Por qué no ha de poder salir determinada figura de signos? ¿Por qué ese reparo? ¿Por qué ha de ser tabú?

lo y dice en prosa: *Luego* esta propiedad vale para todos los números; ahora bien, el número 17 no tiene dicha propiedad.

Pero dentro del cálculo no se puede manifestar la contradicción.

Puedo jugar con las figuras del ajedrez siguiendo determinadas reglas, pero podría también inventar un juego en que se jugara con las reglas mismas: Las piezas de ese juego mío serían entonces las reglas del ajedrez, y las reglas del juego vendrían a ser las leyes lógicas. *De nuevo tendría un juego y no un metajuego.**

Lo que hace Hilbert es todavía matemáticas y no metamatemáticas, y se trata de nuevo de un cálculo como cualquier otro.

Viernes, 26 de diciembre de 1930 (con Schlick)

El estilo del pensamiento [71]

Domingo, 28 de diciembre de 1930 (con Schlick)

Incontradictoriedad III

El problema de la incontradictoriedad de las matemáticas proviene de dos fuentes: 1. De las ideas de la geometría no euclídea, donde se ha tratado de demostrar el axioma de las paralelas, siguiendo el modelo de una *reductio ad absurdum*. 2. De las antinomias de Burali-Forti y de Russell.

Ante todo, fueron las antinomias las que dieron el impulso a la actual preocupación por la incontradictoriedad. Si alguien preguntara a los matemáticos: "Pero, decidme, ¿por qué os interesa tanto esta cuestión?, ¿habéis encontrado siquiera una vez alguna contradicción *en* las matemáticas?", inmediatamente sacarían a colación las antinomias del estudio de las cantidades, y tendrían razón.

[71] Se dejaron tres anversos de hoja para los apuntes de esta conversación. Véase el "Prefacio de la edición alemana", pág. 25.

* La expresión metajuego hace referencia (lo mismo que metamatemáticas) a la jerarquía de lenguajes, según la cual una expresión puede tener otra que la explique. Si digo "caballo" es trisílabo, trisílabo es un metalenguaje de "caballo"; la sintaxis es un metalenguaje de la proposición. Wittgenstein indica que no se ha ido más allá (metá, del griego, más allá) del primer nivel de las matemáticas, al afirmar la posibilidad de la contradicción en los axiomas, pues se podría resolver al mismo nivel con otra nueva regla. Para él las matemáticas son convencionales e inventadas. [T.]

Pero se ha de decir que esas antinomias no tienen que ver en absoluto con las matemáticas; no existe conexión entre las dos cosas. Las antinomias, se ha de saber, no han surgido del cálculo, sino del lenguaje ordinario que toma las palabras en dos sentidos. La solución de las antinomias está en sustituir las expresiones confusas por otras precisas (al tiempo que se atienda al significado propio de las palabras). Las antinomias desaparecerán por el *análisis*, pero no por la *demostración*.

Si debido a alguna confusión salieran contradicciones en matemáticas, no se podrían *aclarar con una demostración*. La demostración no demuestra más de lo que demuestra, pero no puede levantar neblinas. Lo que aquí se precisa es un análisis y no una demostración. La demostración no puede disipar la niebla.

Esto enseña que no se puede dar la demostración de la incontradictoriedad (en tanto se consideren las contradicciones de las matemáticas del tipo de las contradicciones del común) y que la demostración no puede brindar lo que se pide de ella.

Si no veo claro cuál es la esencia de las matemáticas, no habrá demostración que me ayude. Si, por el contrario, entiendo cuál es la esencia de las matemáticas, no se me acudirá la cuestión sobre la incontradictoriedad. [?]

El descubrimiento de Sheffer [72]

¿En qué sentido fue propiamente un descubrimiento que en lógica se pase con una sola constante?

En realidad, ¿qué ha descubierto Sheffer? *

Imaginémonos que, por una casualidad, Frege hubiera escrito sus leyes fundamentales de la lógica según el esquema:

$$\sim(\ldots) \cdot \mathbf{v} \cdot \sim(\ldots)$$

y hubiera creído que, de todas formas, necesitaba dos constantes, pero que llegara otro, *viera* lo que Frege no había visto, y

[72] *Transactions of the American Mathematical Society*, 14 (1913), páginas 481-8. De las dos interpretaciones posibles de una constante lógica, toma aquí Wittgenstein la forma-o, preferida por Nicod *(Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 19, 1917-20, págs. 32-41), aunque él en el *T.L.P.* había utilizado la forma-y.

* El lógico americano H. M. Sheffer, demostró en 1913 que todas las funciones de verdad de una proposición se podían formar de la negación simultánea (llamada también conjunta) no-p y no-q ($\sim p . \sim q$). El signo de negación conjunta, por él introducido, es "$\downarrow$". [T.]

dijera: Podemos valernos de una sola constante. ¿Qué habría descubierto en verdad? Habría visto el nuevo sistema dentro del antiguo. Luego, todo se reduce al *ver:* Mientras no se vea un sistema, no se le tiene. Frege, pues, no lo hubiera tenido, aunque todo lo hubiera escrito en la multiplicidad del nuevo sistema. No se puede buscar el nuevo sistema desde el punto de vista del antiguo, y por lo mismo *no se puede demostrar* por la transformación.

Parece que se puede decir: En lógica podemos bastarnos con tres constantes y aun con dos, ¿no podríamos pasar con *una* sola? Se diría que es una pregunta regular, pero no lo es, ya que no dispongo de método alguno para buscar el sistema. Véase, asimismo: No se pueden contar las constantes lógicas como puedo contar tres manzanas, pues las manzanas constituyen objetos que caen bajo un concepto, mientras que las constantes lógicas son una estructura. Lo que aquí llamo *una* constante lógica tiene una estructura que es diversa de la de dos constantes lógicas. Lo que puedo contar son signos, y en las constantes éstos no importan.

No puede haber demostración alguna que me diga que puede bastarme una constante lógica.

Si, pues, alguien preguntara: ¿Se puede pasar con una sola constante?, o si se quisiera demostrar que es suficiente una sola constante, carecería de sentido.

Este ejemplo aclara lo que quiero decir cuando afirmo que no puede haber demostración sobre la incontradictoriedad de las matemáticas y que si la hubiera no serviría para ningún asunto sobre principios.

[[*Las reglas del juego y las configuraciones de éste*]]

Russel tenía la idea de que sus cinco *primitive propositions* [72a] podían ser al propio tiempo las configuraciones fundamentales y las reglas del proceder en matemáticas. Pero se equivocó, lo que se vio, además, porque él mismo empleó otras reglas (¡en palabras!).

Por tanto, debemos distinguir las configuraciones básicas, del cálculo (las posiciones de salida del juego), y las reglas que permiten que podamos pasar de una configuración a otra.

Esto lo aclaró ya Frege en su crítica de las teorías de Heine

[72a] Para las cinco verdaderas "primitive propositions", véase *Principia Mathematica* I, Cambridge, 1910, págs. 96-7, *1.2-*1.6.

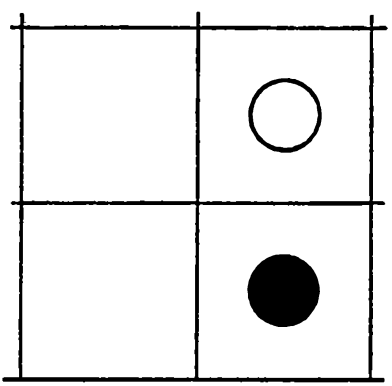
y Thomae: "¡Es sorprendente! ¿Qué diría quienquiera que preguntara por las reglas del ajedrez y por toda respuesta se le mostrara un grupo de piezas sobre el tablero? Probablemente diría que no podía hallar regla alguna, pues no vería sentido en las figuras y su combinación." *(Grundgesetze der Arithmetik,* II, parágrafo 106, pág. 113.)

Si tomo el cálculo como cálculo, las configuraciones del juego no me pueden manifestar contradicción alguna (a menos que arbitrariamente tome una figura, la llame "contradicción" y la excluya del juego. Pero aun en este caso, solamente demostraría que estoy jugando un juego *diferente).*[1]

La idea de la contradicción —en esto estoy firme— es la *contradicción (lógica)* • y ésta solamente puede *aparecer en el juego entre verdadero y falso;* por tanto, solamente donde hacemos aserciones.

Esto es: La contradicción solamente puede presentarse en las *reglas del juego.* Por ejemplo, puedo tener una regla que me diga: El peón blanco tiene que jugar contra el negro.

Si el negro está al lado, falla la regla. Así, pues, hay un caso



1] Por medio de permisiones y prohibiciones sólo puedo determinar *un juego,* pero nunca *el juego.*[73] Lo que Hilbert quiere mostrar con su demostración es que los axiomas de la aritmética poseen las propiedades *del* juego, pero esto es imposible. Hilbert quería casi demostrar que la contradicción (lógica) es *inadmisible.*

[73] Véase más abajo, pág. 117.

• Wittgenstein emplea "Widerspruch" para denotar la contradicción como objeto, y "Kontradiktion" para significar la proposición de la con-

en que no sé qué debo hacer, pues la regla no me dice más. ¿Cómo proceder en semejante ocasión? Nada más fácil que esquivar esta contradicción. Debo tomar una decisión; por tanto, *introducir otra regla más.*

Señalemos a este respecto: Supongamos que se presentaran dos reglas que se contradijeran, pero que yo tuviera tan mala memoria que nunca cayera en la cuenta de ello, sino que olvidara una de las reglas o, indistintamente, tan pronto me fijara en una tan pronto en la otra. En este caso, también diría que todo está en orden. Las reglas son instrucciones para el juego y mientras pueda jugar, están en orden; pero dejan de estarlo en cuanto *advierto* que se contradicen, y esto solamente se demuestra si ya no las puedo emplear: pues el producto lógico de ambas reglas es una contradicción y la contradicción no me dice qué debo hacer. El conflicto aparece, por ende, cuando lo noto. Mientras pude jugar, no hubo problema.

También en aritmética nos encontramos con la dificultad del "estar al lado", con el problema $\frac{0}{0}$. (Si quisiera decir que $\frac{0}{0} = 1$, podría demostrar que $3 = 5$, y entraría en conflicto con otras reglas.)

Vemos, pues, que mientras tomemos el cálculo como tal, no puede presentarse de manera seria la cuestión de la contradicción. Pero, ¿a lo mejor la incontradictoriedad depende del *empleo* del cálculo? A este propósito debemos preguntarnos:

¿Qué es emplear un cálculo?

Puede tomarse en dos sentidos:

1. Que se emplee de tal manera que resulte la *gramática* de una lengua. A lo que la regla permite o prohíbe le corresponde en gramática el término *"con sentido"* y *"sin sentido"*. Sirva de ejemplo la *geometría euclídea,* tomada como el sistema de reglas sintácticas de que nos valemos para describir las cosas espaciales.

Que "entre dos puntos puede trazarse una recta" significa: La aserción que habla de la recta que pasa por esos dos puntos tiene sentido, sea verdadera o falsa. [La palabra "puedo" tiene dos significados: "Puedo levantar 10 kilos", "puedo trazar una recta entre dos puntos".]

tradicción. He traducido la primera acepción por "contradicción" y la segunda por "contradicción (lógica)". [T.]

A la configuración del juego corresponde una regla de la sintaxis. [¿Pueden contradecirse mutuamente las reglas de la sintaxis?] La sintaxis no se puede justificar.

2. Que el empleo del cálculo sea de manera que a las configuraciones del cálculo correspondan *proposiciones verdaderas y falsas.*

Aquí, el cálculo da lugar a una teoría que describe algo.

Las tres leyes de Newton * poseen significado muy diferente del que tiene la geometría. Para ellas existe la verificación por medio de experimentos físicos. Pero para un juego no existe justificación. Esto es muy importante. También la geometría puede tomarse como una descripción de las medidas reales. (?)

Ahora tenemos aserciones ante nosotros, y las aserciones se pueden contradecir de hecho recíprocamente.

Que la teoría *pueda* describir algo depende de si el producto lógico de los axiomas es una contradicción (lógica). Si veo inmediatamente que constituyen una tal contradicción, la cosa queda clara. Pero ¿qué sucede si no lo veo directamente? Entonces queda una contradicción *latente.*

V. gr., los axiomas de Euclides y el axioma: La suma de los ángulos de un triángulo es igual a 181°. Aquí no veo inmediatamente la contradicción, pues no puedo deducir a primera vista que de los axiomas tenga que seguirse que la suma de ángulos sea de 180°.

Mientras nos movamos en el cálculo no tenemos contradicción, pues $s = 180°$, $s = 181°$ no se contradicen recíprocamente, y hasta podría ser que hubiera dos resultados diferentes. Podríamos decir, por tanto: Se puede emplear el cálculo en todo lo que se puede emplear. Más aún, que podría haber otro empleo que diera 180° según un método y 181° según otro. Se trata de encontrar un terreno cuya descripción exija la multiplicidad que poseen los axiomas.

Observación: La contradicción debe ser *contradictoria* (lógicamente), no *contraria.*

* En sus *Principia,* Newton estableció, en 1687, las tres leyes fundamentales del movimiento que son la base de la mecánica newtoniana.

I. Ley: Todo cuerpo tiende a continuar en su estado de inercia o de movimiento rectilíneo uniforme, a menos que sea obligado a cambiar su estado por fuerzas ajenas.

II. Ley: La razón de cambio del momento lineal (acelaración) es proporcional a la fuerza aplicada.

III. Ley: Toda acción sufre siempre una reacción igual (Ej.: retroacción en el disparo). [T.]

Por ejemplo, "Esta mancha es verde" y "Esta mancha es roja" no se contradicen, mientras no añadamos otra regla que haga que su producto lógico sea una contradicción (lógica).

Cuando en una teoría aparece una contradicción (lógica) es como si las proposiciones de la teoría no se pudieran traducir a expresiones de desviaciones de la aguja de un galvanómetro, etc. Sería como si, por ejemplo, la aguja permaneciera quieta o se desviara y no se pudiera comprobar esa teoría.[1]

Las ecuaciones de Maxwell * no expresan un cálculo, como las geométricas, sino que son un fragmento, una parte de un cálculo.

¿Qué quiere decir que hay que "asegurar" las matemáticas? [74] ¿Qué sucedería si las matemáticas se aseguraran? ¿Es una tesis que los axiomas están libres de contradicción?

¿Se puede buscar una contradicción? Sólo cuando hay un método para la búsqueda. Si alguna vez alguien, porque ha ido más allá de las reglas, se encuentra con una contradicción, no hay lugar a la cuestión.

Creo que esto es todo lo esencial en lo concerniente a la incontradictoriedad.

Las reglas en cierto sentido son aserciones: "Tú tienes que hacer esto". Donde hay reglas se puede pasar siempre a descrip-

---

1] Resultaría algo así como: "La aguja se ha desviado hacia la derecha", sin que se dijera desde qué lado se debe contemplarla.

74 *Op. cit.* (Véase más arriba, pág. 105 y nota 69.)

* Conjunto de ecuaciones referentes a cantidades vectoriales en cualquier punto de un campo eléctrico o magnético.

$$\text{Rotación } H = \frac{1}{c}\frac{\delta D}{\delta t} + \frac{4\pi u}{c}$$

$$\text{div. } B = 0$$

$$\text{Rotación } E = -\frac{1}{c}\frac{\delta B}{\delta t}$$

$$\text{div. } D = 4\pi\rho,$$

donde H es la intensidad magnética; B, la inducción magnética; u, la densidad de corriente; D, el desplazamiento eléctrico; t, el tiempo; ρ, la densidad del espacio eléctrico; c, la constante electromagnética.

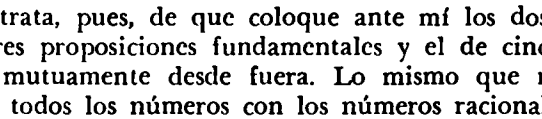
De estas ecuaciones, Maxwell dedujo que la luz se propagaba como ondas magnéticas (Extraído de: H. J. Gray, *Dictionary of Physics*, Longmans, Green & Co. Londres; *id.* para la nota sobre las Leyes de Newton.) [T.]

ciones de la misma multiplicidad, como al describir el juego del ajedrez se explica también cómo juega la gente. Las reglas pueden ser antagónicas, si los asertos correspondientes se contradicen recíprocamente.

[[*Independencia I*]]

WAISMANN pregunta a WITTGENSTEIN: ¿No tiene sentido, por tanto, hacerse preguntas acerca de un sistema de axiomas? Veamos, por ejemplo, el cálculo de aserciones que Russell deduce de cinco proposiciones fundamentales. Bernays ha demostrado que una de esas proposiciones fundamentales está de más y que basta con las cuatro restantes. Ha demostrado también que esas proposiciones fundamentales constituyen un "sistema completo", o sea, que si se añade cualquier otra proposición fundamental que no sea deducible de esas cuatro, hace deducible cualquier otra proposición que se quiera agregar.[75] Ello se debe a que de la contradicción (lógica) se puede deducir cualquier proposición. ¿No es acaso esto un *conocimiento interno* del cálculo de Russell? Tomemos otro caso: Si uso tres proposiciones fundamentales, no podré deducir la misma clase de proposiciones que si utilizara las cinco. ¿No es esto también un conocimiento interno? ¿Y no podría considerarse la prueba de la incontradictoriedad de las matemáticas también como un conocimiento interno?

WITTGENSTEIN: Si primero tomo tres proposiciones y luego cinco, no puedo comparar recíprocamente las clases de inferencias, a menos que forme un *nuevo sistema* en que participen los dos grupos.



No se trata, pues, de que coloque ante mí los dos sistemas —el de tres proposiciones fundamentales y el de cinco— y los compare mutuamente desde fuera. Lo mismo que no puedo comparar todos los números con los números racionales, si antes no los encierro en *un* sistema. Por tanto, no es que consiga un conocimiento interno, sino que vuelvo a construir un nuevo cálculo, aunque en este sistema tampoco tiene que aparecer la proposición: "Una de las clases es más comprehensiva que la otra". Esto ya es prosa que acompaña al cálculo.

---

[75] *Mathematische Zeitschrift* 25, 1926, págs. 305-20.

Respecto de las matemáticas, no se puede echar mano de una explicación de principios, sólo porque se espera sacar el resultado de una teoría.

Ramsey ha escrito, por ejemplo, que existe un problema-guía en la lógica matemática, el problema de la resolubilidad *(Entscheidbarkeitsproblem)*,[76] y que este problema sólo puede resolverse si se sabe que el cálculo ha sido correcto. A lo cual replicaría: *¡No se dan tales "problemas-guías"!* La cuestión de si lo que hago está correcto o deja de estarlo no debe depender de lo que saque en claro con el cálculo.

Se puede preguntar: ¿Cuándo he empleado el cálculo? ¿Puede ser que no sepa si he empleado el cálculo y solamente deba atenerme a la prueba de la incontradictoriedad?

Con Moore siempre discutía esta cuestión: ¿Sólo el análisis lógico puede aclarar qué denotamos con las proposiciones del lenguaje corriente? Moore asentía. ¿Entonces la gente no sabe qué intenta expresar cuando dice: "Hoy está más claro que ayer"? ¿Sólo podemos confiar en el análisis lógico? ¡Qué idea más rara! ¡Sólo la filosofía me ha de aclarar qué es lo que intento decir con mis proposiciones y si he dicho algo con ellas! Naturalmente, debo entender la proposición, sin tener necesidad de conocer su análisis.

Martes, 30 de diciembre de 1930 (con Schlick)

[[Incontradictoriedad IV]]

[[*Frege y Wittgenstein*]]

Waismann lee a Frege:

Grundgesetze der Arithmetik (Leyes fundamentales de la aritmética), II, Parágrafo 117:

> ...si pudiéramos establecer el grupo "o : o = 3" y el grupo "o:o=4"... De ambos podríamos deducir el grupo "3 = 4". Aquí está quizás el motivo del dicho de Thomae, de que la división no siempre es unívoca y que, *por tan-*

[76] En "On a Problem of Formal Logic", 1928: Véase, *Foundations of Mathematics*, Londres, 1930, pág. 82.

to (?),[77] no se puede efectuar libre de contradicción. Pero aquí, en la aritmética formal, no se encuentra contradicción alguna. ¿Por qué no se ha de permitir un grupo del tipo "3 = 4"? No se ha vedado todavía... escribir un grupo de figuras como "3 = 4". Solamente si se promulga esa prohibición, surge la contradicción, o mejor el conflicto entre las reglas que en parte prohiben y en parte permiten.

Ibid. Parágrafo 118:

Más debe llamar la atención que se hable de incontradictoriedad de una figura. Extrañaría mucho que, respecto de una pieza de ajedrez, empezara a correr la voz de que contenía una contradicción... nos sorprenderíamos de que apareciera solapado en el interior de una pieza el conflicto que reinara entre las reglas del juego. Consiguientemente, para llegar a una inteligencia, nuevamente tendríamos que remitir la contradicción a las reglas.

WITTGENSTEIN: Lo primero que tiene que llamar la atención del lego es que los matemáticos se la pasen temiendo lo mismo, que para ellos es como una pesadilla,[1] la contradicción. En cambio, no temen que una proposición pueda ser una tautología, aunque la contradicción * no es peor que la tautología. En lógica, la contradicción * tiene la misma importancia que la tautología, y se podría estudiar lógica, de igual modo, con contradicciones (lógicas). Tanto la contradicción * como la tautología no *dicen* nada, sino que solamente son métodos para demostrar las conexiones lógicas entre las aserciones.

Se habla de la "proposición de la contradicción". En realidad, creo que es el temor a la contradicción * lo que la hace concebir como una *proposición:*

"$\sim$ (p. $\sim$p)"

Pero puedo tomar la proposición de la contradicción como una regla sin más: prohibo la formación del producto lógico

---

1] "nightmare" *(sic* en el original alemán [T.]).

[77] El signo de interrogación lo utiliza Waismann aquí para indicar lo que dice Frege en la nota siguiente: "Y con esto se ve, 'por tanto', que la extracción de una raíz cuadrada en general no puede ser realizada sin que aparezca una contradicción."

* Entiéndase contradicción (lógica).

"p. ~ p". Ahora bien, la tautología[77a] "~ (p. ~ p)" no expresa esa prohibición. ¿Entonces?... La tautología no dice nada, sino que es la regla la que dice algo.

WAISMANN replica a la cuestión de WITTGENSTEIN: Dice usted que con la permisión y la prohibición solamente puedo conseguir determinar *un* juego, mas no *el* juego. ¿Es cierto eso?[78] Piense, por ejemplo, en el caso de que en el ajedrez se permitiera cualquier jugada y no se prohibiera ninguna. ¿Sería todavía un juego? ¿No deben acaso las reglas del juego poseer ciertas propiedades, para que constituyan un juego propiamente dicho? ¿No se podría concebir la exigencia de incontradictoriedad como si por ella quedara excluido el juego "tautológico", es decir, aquél en que todo estuviera permitido? Si, mediante una demostración correcta, se pudiera deducir la fórmula "o ≠ o" y si aceptamos con Hilbert el axioma "o ≠ o → 𝔄", donde 𝔄 es cualquier fórmula, podríamos tomar de la inferencia

$$\frac{o \neq o \qquad o \neq o \rightarrow \mathfrak{A}}{\mathfrak{A}}$$

la fórmula 𝔄, y transcribirla;[79] lo que equivaldría a afirmar que se puede deducir cualquier fórmula, con lo que el juego perdería su carácter y su interés.

WITTGENSTEIN: ¡En absoluto! Hay aquí una equivocación, debida a la confusión entre "reglas del juego" y "configuración de las piezas del juego". La cosa está así: El juego es tautológico cuando son tautológicas las *reglas del juego* (cuando no pasan de permitir o prohibir), pero en este caso no se trata de eso. También este juego tiene sus reglas determinadas; se trata, pues, de un juego como otro, y la figura "o ≠ o" es totalmente secundaria.

Si se trata de una figura que sale en *ese* juego y la excluyo, tengo ya *otro juego*. Pero no: en el primer caso no tengo ningún juego, en el segundo sí lo tengo. Esto es claro: Una clase de reglas y prohibiciones limita a otra clase de reglas y prohibiciones, pero el *juego no limita con el no-juego*. El juego "tautológico" se tiene que presentar como un caso límite del juego, como sus fronteras naturales. El sistema de los juegos debe

[77a] Waismann escribió aquí "contradicción" (lógica); sin duda un *lapsus calami*.

[78] Véase más arriba, pág. 110.

[79] *Op. cit.* (véase más arriba, pág. 105 y nota 69), pág. 175.

limitarse desde dentro y ese límite consiste en que allí *desaparece la regla.* Ese caso límite no lo puedo ocasionar fijando reglas y prohibiciones, pues no haría sino determinar de nuevo un juego como tantos otros. Si, pues, digo: La figura "o ≠ o" tiene que permitirse, no hago sino dar una regla más y fijo un juego, aunque sea distinto de aquél en que he excluido esa figura. Por consiguiente: por las reglas no podré determinar *el* juego, sino solamente *un juego.*

WAISMANN pregunta a WITTGENSTEIN: ¿Existe una teoría del ajedrez? Sí. Luego, podemos emplear esa teoría para conseguir explicaciones, mediante ella, sobre las posibilidades del juego; por ejemplo, si en determinada disposición del tablero puedo dar mate al rey en ocho tiradas, etc. Si, pues, existe una teoría del juego, no veo por qué no tenga que existir una teoría del juego de la aritmética y podamos emplear las proposiciones de esa teoría para conseguir explicaciones sobre las posibilidades de ese juego. Esa teoría son las metamatemáticas de Hilbert.

WITTGENSTEIN: Lo que se llama la "teoría del ajedrez" no es una teoría que describa algo, sino una especie de geometría. Es de nuevo un cálculo y no una teoría.

Para aclarar esto les voy a preguntar: ¿Existe diferencia, según su opinión, entre estas dos proposiciones: "En ocho jugadas puedo llegar hasta allí", y: "He demostrado por la teoría que puedo llegar hasta allí en ocho jugadas?" No. Pues si en la teoría en vez del tablero con sus figuras empleo un simbolismo, tengo igualmente el conocimiento de que puedo llegar en ocho jugadas, o sea, que con el simbolismo llego también en realidad, pues hago con los signos lo que podría hacer sobre el encasillado con las piezas. Si efectúo las tiradas y demuestro así la posibilidad, no he hecho más de lo que hice en la demostración, que fue establecer los movimientos simbólicamente. Lo que faltaba era el movimiento real. Pero ustedes y yo estamos conformes en que el movimiento de las piezas sobre el tablero es algo inesencial.

En la demostración llevo a cabo lo mismo que realizo en el juego, exactamente igual que si dijera: Usted, señor Waismann, haga una cuenta, pero de antemano le voy a decir qué cifras van a resultarle. Yo efectúo la cuenta, aunque empleando otros signos (o con los mismos signos, pero tomados de distinta manera). Puedo volver a *calcular* el resultado de una cuenta, pero no puedo llegar a lo mismo por un camino totalmente distinto. No es que usted esté calculando y yo sepa el resultado por una *teoría.* Lo mismo hay que decir de la *"teoría del ajedrez".*

Si, pues, en la "teoría" determino que existen tales posibilidades, me estoy desenvolviendo otra vez dentro del juego, no en un metajuego. A cada paso del cálculo corresponde una jugada en el juego, y toda la diferencia queda en el movimiento mecánico de las piezas.

Por lo demás, es de importancia que no pueda ver las figuras y sepa si se trata de peones, alfiles o de la torre, etc., pues no podré decir: Esto es un peón *y* para dicha pieza existen tales y tales reglas. Ya que son sólo las reglas del juego las que determinan esa figura: El peón *es* la suma de las reglas, según las cuales se mueve (incluso el campo es una figura), lo mismo que en el lenguaje son las reglas de la sintaxis las que determinan lo que hay de lógico en la palabra.

WAISMANN presenta la siguiente objeción: Bien; esto me aclara todo. Hasta aquí no hemos salido del caso en que la teoría dice qué configuración es posible. ¿Qué sucede cuando la teoría demuestra que una determinada configuración *no* puede entrar, *v. gr.* las cuatro torres, juntas en una misma fila? Este caso lo trae Hilbert. Aquí, la teoría no puede modelar el juego. A los pasos del cálculo ya no corresponden las tiradas del juego.

WITTGENSTEIN: Ciertamente que no. Pero también en este caso se ve que la teoría es un cálculo, aunque diferente del juego. Tenemos aquí un *nuevo* cálculo, un cálculo de otra multiplicidad.

Pero hay que tener presente ante todo que: *Cuando demuestro que no puedo hacer determinada cosa, no demuestro con ello una proposición, sino que doy una inducción.*

Puedo *ver* también la inducción *sobre el encasillado.* Voy a explicar qué quiero decir. Lo que demuestro es que, mientras juego, no puedo alcanzar determinada posición. Esa demostración solamente puede suceder por inducción. Es importante, a este propósito, que aclaremos las cosas respecto de la esencia de demostración por inducción.

En las matemáticas se dan *dos tipos de demostración:*

1. Una demostración que prueba determinada fórmula, que aparece en la misma demostración como su último miembro.[1]

2. La demostración por inducción. Salta a primera vista aquí que la proposición que se ha de demostrar no aparece en la demostración; por consiguiente, la demostración no demuestra

---

1] $(a+b)^2 = (a+b)\ (a+b) = a\,(a+b) + b\,(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

la proposición. O sea, la inducción no es un proceso que conduce a una proposición, sino que nos deja ver una infinita posibilidad; en esto solamente consiste la esencia de la demostración por inducción.

A consecuencia de esto, se habla de lo que nos muestra la demostración por inducción como si fuera una proposición, y se emplean la palabra "todos". Pero esta proposición añade algo a la demostración, o mejor aún: La proposición es a la demostración lo que el signo es a lo significado. La proposición es un nombre de la inducción. La representa, pero no se sigue de ella.[1]

También se puede hacer palpable la inducción en el tablero del ajedrez, por ejemplo, diciendo que puedo moverme de aquí para allá, de allí para otro lado, etc. Pero no corresponde a la inducción la tirada del juego.

Cuando, pues, en "teoría" demuestro que determinada posición nunca puede ocurrir, doy una inducción que muestra algo pero que no expresa nada. Por consiguiente, en la "teoría" no existe la proposición: "Esto es imposible". Pero alguien dirá que debe existir conexión entre el juego real y la inducción. Tal conexión existe y consiste en que después de la demostración por inducción ya no intentaré establecer esa configuración en el juego. Antes quizás la habría intentado para acabar rechazándola; ahora no la intento siquiera. Es lo mismo que cuando demuestro por una inducción que los números primos son infinitos o que $\sqrt{2}$ es irracional. El efecto de esa demostración en el cálculo práctico consiste en que no se necesita buscar el "mayor número primo", o bien, una fracción que sea $\sqrt{2}$. Pero aquí hay que hilar más fino. ¿Se *podía* buscar antes? Lo que se ha hecho tenía una similitud externa con la búsqueda, aunque era de una naturaleza distinta: Se ha hecho algo, en la esperanza de que saldría algo distinto. Pero esto no fue una búsqueda, del mismo modo que no puedo buscar menear las orejas. Lo único que puedo hacer es mover cejas, frente, etc. en la esperanza de que las orejas también se meneen. No sé si lo conseguiré, por tanto no puedo *buscarlo*.

En *el* sistema en que reconozco que determinado número es primo, no puedo preguntar por el número de los números primos. La pregunta cabe cuando se emplea la forma sustantivada,

---

1] 1:3 = 0.33
1
1

1:3 = 0.3
1 —
—

y si se ha descubierto la inducción, esto de nuevo es algo distinto del cálculo de un número.*

A las inducciones corresponden las fórmulas del álgebra (cálculo literal), porque las relaciones internas entre las inducciones son las mismas que las relaciones internas entre las fórmulas.

El sistema del cálculo literal es un nuevo cálculo, pero no es al cálculo numérico ordinario lo que un metacálculo es a un cálculo. *El cálculo literal no es una teoría.* Esto es lo esencial. La "teoría" del ajedrez se asemeja al álgebra —en cuanto busca la imposibilidad de ciertas disposiciones— en su relación con el cálculo numérico. De igual modo, las "metamatemáticas" de Hilbert se han de desenmascarar como matemáticas larvadas.

Demostración de Hilbert

("Nueva fundamentación de las matemáticas" 1922) [80]

"Si el formalismo ha de sustituir a la teoría anterior, consistente en inferencias y afirmaciones, la contradicción intrínseca debe encontrar también su equivalente formal". "a = b" y "a ≠ b" no pueden ser fórmulas igualmente demostrables.

La prueba de la incontradictoriedad del modelo sencillo de Hilbert es de tipo inductivo: La prueba nos muestra, por una inducción, la posibilidad de que siempre sigan apareciendo signos →.

La prueba nos deja ver algo. Pero lo que muestra no se puede expresar por una proposición. Consiguientemente, no se puede decir: "Los axiomas están libres de contradicción". (Del mismo modo como no se puede decir: Existe infinidad de números primos. Esto es prosa.)

---

[80] Véase más arriba, pág. 105, nota 69. La cita que viene a continuación aparece en la pág. 170, y la prueba de la incontradictoriedad en la página 172 y 173 de la obra allí citada.

* Párrafo oscuro, a mi parecer. Creo, sin embargo, que su sentido viene a ser el siguiente: dentro del cálculo con los números primos no puedo averiguar cuántos de estos números existan; para ello tengo que acudir a raciocinios complementarios (lo que en otras partes Wittgenstein llama "prosa" y, aquí, "forma sustantivada"). Si al proceder así —mediante raciocinios—, descubro que estoy sirviéndome de la inducción, tampoco consigo nada, pues me he salido de lo que me dan los números primos estrictos. [T.]

Creo que solamente puede llamarse demostración sobre la incontradictoriedad a una cosa: a examinar las reglas. Lo demás no se puede hacer. Imagínese que doy a alguien una larga lista de encargos que debe cumplir en la ciudad. La lista es tan larga, que quizás he olvidado algún recado y he dado otro en su vez, o he reunido en uno encargos que eran para varias personas. ¿Qué debo hacer para asegurarme de que van todos los encargos? Repasar la lista. Pero no puedo demostrar nada. (No hay que olvidar que aquí sólo nos las habemos con *reglas* del juego, no con las configuraciones del mismo: En geometría sería pensable que al repasar los axiomas no diera con la contradicción.) Pues si digo: Voy a ver si el producto lógico es una contradicción (lógica), me resulta lo mismo. La disposición en forma de contradicción (lógica) sólo *facilita* la cosa. Si a esto se le quiera llamar demostración, bien; pero en realidad solamente es un método de facilitar el control. Con todo, uno ha de decirse: En sí tal "demostración" no me puede preservar de haberme saltado algo.

Lo que da el control, no lo puede dar ningún cálculo.

¿Qué pasa, pues, cuando examino las reglas del juego "sistemáticamente"? En cuanto me muevo dentro de un sistema, tengo de nuevo un cálculo, con lo que vuelve a surgir la cuestión de la incontradictoriedad una vez más. Luego, no me queda otro remedio que pasar revista a una regla tras otra.

¿A qué se debería si en un cálculo saliera "o $\neq$ o"? Sencillamente: No estaríamos frente a una aritmética modificada, sino frente a una aritmética totalmente diferente que nada tendría que ver con la "aritmética cardinal". No se podría decir: En determinado paso coincide todavía con nuestra aritmética (semejante a como la geometría no euclídea lo hace con la euclídea —en este caso la diversidad de un axioma no tiene significado tan profundo), sino que no se daría el menor rastro de semejanza. Si podría emplear semejante cálculo es otra cuestión.

Aquí se dan varias dificultades por lo menos. En primer lugar, hay algo que no veo claro: "a = b" solamente expresa la sustituibilidad de b por a. La ecuación es, por tanto, una regla de signos, una regla del juego.[1] ¿Cómo, por consiguiente va

---

1] Frege, *Grundgesetze der Arithmetik*, II, parágrafo 107:

"Si, por consiguiente, se considera la aritmética formal como un juego, entonces la fórmula "a+a' = a' + a" es, como expresión de una regla de este juego, una de las bases de su teoría

a poder ser axioma, es decir, configuración del juego? Desde ese punto de vista, no es inteligible en absoluto una fórmula del tipo "o ≠ o", pues vendría a decir que *o* no es sustituible por *o;* ¿tengo que mirar acaso si uno de los *o* tiene rabito? ¿Qué significa, pues, tal prohibición? Se trata de lo mismo que cuando digo: "a = a". Por más que se escriba, no deja de ser una sandez. El maestro tiene toda la razón cuando a los niños de su escuela les enseña que 2 + 2 = 4 y no que 2 = 2. El modo como los niños aprenden a contar está tan perfectamente que no se ha de desear buscarle más pelos. Que "a = a" no dice nada, se ve claramente por el hecho de que nadie emplea esa fórmula.

WITTGENSTEIN: ¿Qué opina usted? Si al calcular me encontrara con la fórmula "o ≠ o" ¿no sería interesante ese cálculo?

SCHLICK: No, todo matemático diría que eso no le interesa.

WITTGENSTEIN: Pues, perdone usted, ¡sería extraordinariamente interesante que apareciera una cosa así! En el cálculo todo el mundo se interesa, salga lo que salga. ¡Qué raro! ¡Aquí sale esto y allí aquello! ¿Quién lo hubiera pensado? ¡Cuánto más interesante si resultara una contradicción! Pronostico que se emprenderían investigaciones matemáticas sobre cálculos que contuvieran una contradicción y se haría alarde de que finalmente nos habríamos librado de la incontradictoriedad.

[Por ejemplo, tal cálculo se podría emplear de modelo sobre el que se construyeran otros, para que se viera que también éstos contenían contradicciones.]

¿Qué sucedería si me diera por emplear ese cálculo? ¿No procedería con recta conciencia mientras no hubiera demostrado la incontradictoriedad? Pero, ¿puedo hacer semejante pregunta? Si puedo calcular, es como si hubiera empleado ese cálculo; no es posible la corrección posterior. Lo que puedo, lo puedo. No puedo deshacer lo hecho y decir que aquello propiamente no fue un cálculo. (?)

¿Debo esperar que la prueba de la incontradictoriedad consista en que puedo emplear el cálculo? Todo lo que se ha calculado hasta ahora ¿ha sido propiamente a crédito *—sub specie aeterni—?* ¿Es pensable que un día se revele que todo fue

---

(del juego), gracias a la cual se pueden formar inferencias en ésta; pero no es algo por lo que quepan cambios en el curso del juego, no es un objeto del juego, ni se ha de comparar con la disposición de las piezas del ajedrez, sino con la expresión verbal de una regla del ajedrez."

erróneo? ¿No sé lo que hago? Todo se reduce a que se quiera demostrar que determinadas proposiciones son sinsentidos.

O de otro modo: Tengo una serie de proposiciones, por ejemplo: "p, q, r,..." y una serie de prescripciones operatorias, *v. gr.*: ".,v,~" y se pregunta: ¿Se podrá llegar, siguiendo el empleo de estas prescripciones operatorias en las proposiciones dadas, a encontrar un sinsentido? La pregunta estaría justificada si bajo "sinsentido" entendiera contradicción (lógica) y tautología; en ese caso, debería tomar las reglas para la formación de aserciones, de modo que no aparecieran esas fórmulas.

¿Qué sucedería propiamente si un físico hubiera trabajado con un cálculo y, luego, los matemáticos descubrieran que ese cálculo era totalmente contradictorio?

SCHLICK: No habría perjuicio alguno.

WITTGENSTEIN: Dependería de la interpretación. Se podría emplear un cálculo contradictorio, pero tendría que ser interpretado. ¿Qué hubiera pensado Aristóteles si alguien le hubiera hablado de una lógica trivalente? Habría exclamado: ¡Disparates! Una aserción solamente puede ser o verdadera o falsa, no una tercera cosa. Ahora, empero, llega Tarski y dice: ¿Por qué? Es bien posible una lógica trivalente. ¡Todo puede ir perfectamente! Llamaremos a la tautología "verdadero", a la contradicción (lógica) "falso", y al tercer valor "posible".[81]

Pensemos en las tres leyes de Newton. Si sus ecuaciones expresan algo, si tienen sentido, no depende de las propiedades que posea el cálculo.

Lo que quiero decir es siempre lo mismo: La prueba de la incontradictoriedad no puede constituir ninguna *cuestión vital de las matemáticas.*

Creo que esto está en conexión estrecha con aquello de que no vale preguntar: ¿Puedo encontrarme alguna vez con una contradicción? Lo único que me cabe preguntar es si dispongo de algún procedimiento para buscar; pero no puedo buscar en lo infinito.[82]

---

[81] La idea de un sistema plurivalente, introducida en 1930 por Lukasiewicz y Tarski, procedía totalmente de Lukasiewicz. Véase A. Tarski, *Logic, Semantics, Metamathematics,* Oxford, 1956, págs. 25 *ss.*, donde aparece reimpreso el artículo original. Que aquí la idea aparezca atribuida a Tarski se debe a que hacía poco había sostenido un coloquio en Viena, el 21 de febrero de 1930, y la había explicado. Cf.: *Monatshefte für Math. u. Phys.*, 38, 1931, págs. 24-5.

[82] Véase más arriba págs. 30 *s.*

Si se empleara un cálculo contradictorio, sería como si el físico se hubiera equivocado al contar: La aritmética no deja por ello de ser utilizable. Por otra parte, la demostración no nos protege de que nos equivoquemos al contar.

WAISMANN pregunta a WITTGENSTEIN: ¿Qué habría ocurrido si algún físico de hace cien años hubiera expuesto una teoría del tipo de la teoría general de la relatividad, o sea, un sistema compuesto de axiomas mecánicos y geométricos? Entonces, ya que no veían clara la cosa, hubieran tenido razón en preguntar: ¿Es imaginable que esa teoría esté libre de contradicción?

Más aún, el problema de la incontradictoriedad se ha convertido en algo actual en el análisis, esto es, en el estudio de los números reales. Aquí surgen conformaciones conceptuales imprevistas (fronteras superiores de una cantidad limitada) del mismo tipo de las que ocasionan las antinomias, por lo que se sospecha que existe la posibilidad de la contradicción. Lo mismo sucede en el estudio de las cantidades (axioma de la selección y axioma del infinito) donde no se columbra si se encontrará una contradicción.

WITTGENSTEIN: En efecto, todo depende de que el análisis y el estudio de las cantidades se tome siempre como una teoría que describe algo y no como un cálculo.

Jueves, 1 de enero de 1931 (con Schlick) [1]

América.[83] *Lo esencial del college* *

WITTGENSTEIN: ¿Qué podemos darles a los americanos? ¿Acaso nuestra cultura medio echada a perder? Los americanos poseen ya su cultura y nada tienen que aprender de nosotros. *"What I Believe" de Russell.*[84] De ninguna manera "inocuo". *Rusia.*

1] Uno solamente se puede proponer ser honesto, lo demás no se lo puede uno proponer.

83 Esta observación se debió quizás al propósito de Schlick de visitar Norteamérica en el curso del año.

84 *Forum*, 82, 1929, págs. 129-134, reimpreso en *Living Philosophies*, Nueva York, 1931, págs. 9-19 *(no* idéntico con el artículo aparecido con el mismo título en *Nation*, 132, 1931, y 150, 1940). Afirma Russell que ninguna obediencia a leyes morales puede sustituir al amor, y que, si el amor fuera auténtico bastaría, unido a la inteligencia, a poner en acto las necesarias reglas morales.

* Amerika. Das College-Wesen, en el original. [T.]

La pasión promete algo; nuestras habladurías, en cambio, carecen de fuerza.

[[Incontradictoriedad V]]

¿Está justificado preguntar por la incontradictoriedad? Lo curioso del caso es que se busca algo, sin saber qué es lo que propiamente se está buscando. ¿Cómo, por ejemplo, puedo preguntar si la geometría euclídea está libre de contradicciones, cuando ni siquiera puedo imaginarme que pueda tenerlas? ¿Qué pasaría si, de hecho, contuviera una contradicción? Se ha de responder a esta pregunta, antes de proceder a averiguar cuestiones semejantes.

[Se pretende, pues, una meta que no está fija.]

Algo hay claro, sin embargo: Solamente podré entender una contradicción, cuando sea una contradicción (lógica).* Supongamos que tengo una serie de proposiciones, digamos p, q, r,... y que formo un producto lógico. Lo único que puedo hacer es averiguar si ese producto lógico es una contradicción (lógica). ¿En esto consiste *la* cuestión sobre la incontradictoriedad? Entonces se podría resolver el asunto en cinco minutos. En este sentido, nadie puede dudar de que los axiomas euclídeos están libres de contradicción.

¿Qué otro sentido todavía puede tener la cuestión? Quizás: ¿Que podría ser que alguna vez, en las sucesivas inferencias, se introdujera la contradicción? A lo que habría que responder: ¿Disponemos de algún método para dar con la contradicción? Si no es así, no existe tampoco cuestión alguna, pues no se puede buscar en lo infinito.[85]

Waismann: Pero uno puede idear todavía algo; por ejemplo, el esquema de la demostración indirecta. Tomando una analogía, se puede referir esto a un sistema de axiomas. Distingamos dos cosas: el problema formulable dentro de las matemáticas, y que en ellas tiene su solución, y la idea directriz, que precede a la misma construcción de las matemáticas. Estas ideas directrices las poseen los matemáticos también, por ejemplo, en el caso del problema de Fermat.** Quiero indicar que la cues-

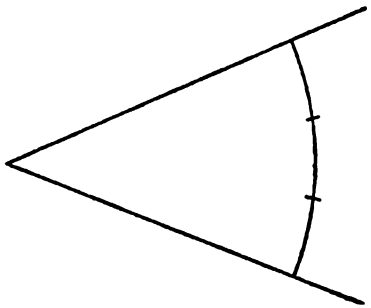
85 Véase más arriba págs. 30 *s.*

* Wittgenstein emplea "Widerspruch" para denotar la contradicción como objeto, y "Kontradiktion" para significar la proposición de la contradicción. He traducido la primera acepción por "contradicción" y la segunda por "contradicción (lógica)". [T.]

** Teorema de Fermat, de que aquí se habla, reza así: La ecuación de

tión de la incontradictoriedad pertenece a ese círculo de problemas prematemáticos.

WITTGENSTEIN: ¿Qué es la analogía? ¿Por ejemplo, analogía con la demostración indirecta? Sucede lo mismo que con la tripartición del ángulo. No puedo buscar la tripartición del ángulo. ¿De qué se trata, pues, cuando un matemático se ocupa en este asunto? Puede ser que se trate de dos cosas. 1. Que dibuje un ángulo dividido en tres partes:



2. Que piense en la construcción bi-, cuatri-, ...partita. Y aquí está el error: Se cree que, como se puede hablar de la bi- y cuatripartición, lo mismo cabe decir de la tripartición, como se pueden contar dos, tres y cuatro manzanas. Pero la tripartición, si se diera, pertenecería a otra categoría distinta. En el sistema en que me es dado hablar de bi- y cuatripartición, no puedo hablar, sin embargo, de tripartición. Son conceptos *lógicamente* distintos.

No puedo colocar la bi-, tri- y cuatripartición en el mismo saco, porque son formas totalmente distintas y las formas no se pueden contar, como sucede con las demás cosas; no se pueden incluir bajo un mismo concepto.

Sucede lo mismo que con el menear las orejas. El matemático se deja guiar por asociaciones y analogías con el sistema que ha estado empleando. No quiero decir, si se trata del problema de Fermat, que sea algo equivocado o injustificado. En absoluto.

Si, por ejemplo, dispongo de un método para buscar todos los números que cumplimentan la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$, puedo sugerirme la fórmula $x^n + y^n = z^n$. Puedo dejarme sugerir por una fórmula. Por consiguiente, puedo decir: Aquí hay una su-

tres incógnitas $x^n + y^n = z^n$ no podrá tener solución con enteros positivos, si n es un entero y mayor que 2.

Por más que se llevan siglos, no se ha logrado demostrar esto. [T.]

gerencia, pero no una cuestión. Los "problemas" matemáticos son siempre sugerencias.

Las sugerencias son a veces como preparaciones para un cálculo.

WAISMANN: ¿Qué significa, pues, la demostración de que la geometría no euclídea está libre de contradicción? Tomemos el sencillo caso de la aplicación de la geometría bidimensional de Riemann sobre la esfera. Entonces tenemos una traducción: A cada concepto, esto es, a cada tesis de una geometría, corresponde un concepto, esto es, una tesis en la otra. Si las tesis contuvieran una contradicción en uno de los casos, también se tendría que poder reconocer esa contradicción en la otra. Se puede decir por consiguiente: El sistema de los axiomas de Riemann está libre de contradicción, suponiendo que se trate de los axiomas correspondientes de la geometría euclídea. Habríamos cotejado la incontradictoriedad con referencia a la geometría euclídea.

WITTGENSTEIN: No tiene sentido hablar de incontradictoriedad "con referencia a la geometría euclídea". Lo que sucede aquí es lo siguiente: A una regla corresponde otra regla (a una configuración del juego, otra configuración del juego). Tenemos una formación, y punto. Lo demás que se quiera añadir es prosa. Se dice: *Luego,* el sistema está libre de contradicción. Pero no existe tal *luego,* lo mismo que sucede en la inducción.[85a] Todo depende de que se tome la demostración equivocadamente. La demostración es la demostración.

Un grupo de reglas (configuraciones) está en relación interna similar recíprocamente a como sucede con el otro grupo de reglas (configuraciones). Esto *es lo que se muestra en la demostración y nada más.*

Independencia II

Supongamos que tenemos cinco axiomas y que descubrimos que uno de dichos axiomas puede deducirse de los otros cuatro y que, por ende, es superfluo.[86] Ahora pregunto: ¿Qué importancia tiene semejante descubrimiento?

Creo que pasa aquí lo que con el descubrimiento de Sheffer, que resulta ser una constante lógica.[87]

85a Véase más arriba, pág. 29.
86 Véase más arriba, pág. 114.
87 Véase más arriba, pág. 108.

Antes que nada, aclaremos que los axiomas determinan –junto con las reglas de la progresión en el cálculo– un grupo de proposiciones. Ese recinto de proposiciones no se nos da por otra parte, sino solamente por los cinco axiomas. Consiguientemente, no podemos preguntar: ¿Queda ya *determinado* el recinto por los cuatro axiomas? pues el recinto no es algo que haya quedado desprendido de los cinco axiomas. Los cinco axiomas y lo que se deriva de ellos son todo mi mundo y de ese mundo no puedo salirme.

¿Qué hay que decir respecto a la pregunta: son independientes recíprocamente los cinco axiomas? Respondería: ¿Existe algún método para decidir esta cuestión? Y aquí pueden presentarse distintos casos:

1. *Que no exista ese método.* Entonces la cosa queda según la he descrito: Todo cuanto tengo son los cinco axiomas y las reglas del procedimiento. Por tanto, no puedo buscar si quizás *alguno* de esos axiomas se deducirá como consecuencia de los otros. No puedo, por tanto, plantearme la cuestión de la independencia.

Si suponemos, empero, que en una demostración resulta que uno de los axiomas procede de otro, *no* habremos demostrado con eso que nos bastan cuatro axiomas y que uno está de más, sino solamente que dicho axioma es consecuencia de tales y cuales presuposiciones. Ahora dirán ustedes: Bien, pero de todos modos puedo inferir que ese axioma es superfluo. No; no me es dado llegar a esa *conclusión* siguiendo una inferencia lógica, sino que debo *ver,* como lo *vio* Scheffer, que se trata de una constante.

Debo ver el nuevo sistema en el sistema en que me estoy moviendo y donde practico la demostración.

Se trata de ver y no de demostrar. A lo que veo –la posibilidad del sistema– no corresponde proposición alguna. No se afirma nada; luego, tampoco se puede demostrar nada.

Que vea el nuevo sistema es, en cierta medida, una feliz coincidencia. Ciertamente que puedo pasar al nuevo sistema, pero no lo puedo buscar ni puedo llegar a él mediante una transformación ni ver su posibilidad al través de ninguna demostración.

2. a. *Que exista el método* de fijar la independencia, en el sentido incluso de que un axioma afirme que "p v q", y el otro "p". Procederé entonces a representar los distintos axiomas con letras correspondientes y a deducir las funciones de verdad. De ese modo tiene que ser fácil ver si un axioma pro-

cede de otro. Si *esto* tiene que ver con la independencia, ya no es problema serio.

Supongamos que hiciera una lista de las personas que se hallan presentes en esta habitación e incluyera en ella dos veces al profesor Schlick. Entonces añado la regla: Cuando un dato ya está contenido en otro, debe ser omitido. No se trata aquí, sin embargo, de que exista algún problema relacionado con la independencia. Dirán con razón: ¡Por tanto, escriba usted la lista cual debe ser! Para ello no se requiere averiguar si existe independencia. Pues lo mismo pasa aquí.

Me replicarán: ¡Pero éste no es el caso! Esto nos lleva a otra posibilidad.

2 b. *Que haya otro método, y no trivial,* de determinar si existe independencia. Entonces la palabra "independencia" *significará* algo distinto.

Tal método podría consistir, por ejemplo, en que yo tomara cuatro axiomas, añadiera la negación del quinto y mostrara que este sistema de axiomas tan cambiado tenía validez (Método del modelo). Si, por consiguiente, en este caso diera cinco axiomas de los que bastaran cuatro, habría cometido una equivocación sin más, pues desde el principio me podría haber dado cuenta de que uno de los cinco axiomas salía sobrando y como a pesar de todo habría seguido con ellos, la culpa sería mía. Sin duda, no basta en esta contingencia exponer los axiomas, sino que se ha de demostrar que, efectivamente, poseen el carácter de la independencia.

Parece que Hilbert en su geometría sigue este procedimiento.[88] De todas formas, queda todavía por esclarecer un punto importante: ¿Es un *método* el método del modelo? ¿Puedo buscar un modelo sistemáticamente, o quedo a merced del acaso? ¿Qué sucedería si no diera con un modelo apropiado?

Resumen

La cuestión de si un sistema de axiomas es independiente sólo tendrá sentido en el caso de que exista un procedimiento para dirimirla. De otro modo, no se puede lanzar la pregunta y si, por ejemplo, se descubre que un axioma es superfluo, no

[88] *Grundlagen der Geometrie,* Leipzig 1899, págs. 22 *ss.* El método aquí empleado (a saber, hallar una interpretación de la geometría no euclídea dentro de la euclídea) es absolutamente normal, y no se ve claro por qué Wittgenstein dice que Hilbert "parece" seguirlo.

se ha demostrado con ello proposición alguna, sino que se ha visto un nuevo sistema dentro del antiguo.

Y dígase lo mismo de la incontradictoriedad.

Axiomas I, 1 y I, 2 de Hilbert [89]

"2 puntos A y B distintos uno de otro siempre determinan una recta a."
"2 puntos cualesquiera de una recta, (si son) distintos entre sí, determinan esa recta."

Todavía no sé cómo se han de tomar estos axiomas ni cuál sea su forma lógica.

WAISMANN: Se podrían escribir como funciones de verdad del tipo: "Si x es un punto, entonces... para todas las x." De todas formas, creo que así los axiomas quedarían sin sentido propio. No deberíamos introducir los puntos uno tras otro, sino que me parecería más correcto introducir de golpe, mediante coord[[enadas]], puntos, rectas, planos.

WITTGENSTEIN: Así lo creo yo también. Pero hay una cosa que no entiendo. ¿Qué pasaría si estos axiomas constituyeran una contradicción? Es decir: Como están ahora no pueden dar ninguna contradicción (lógica), a menos que mediante una regla determine que su producto lógico es una contradicción (lógica). Con la contradicción sucede exactamente igual que con la contradicción de las proposiciones: "Esta mancha es verde" y "Esta mancha es roja". Como están, esas dos proposiciones no se contradicen, pero sí lo harán en cuanto introduzcamos otra regla de sintaxis que nos prohiba considerar verdaderas las dos proposiciones. Sólo entonces aparecerá la contradicción (lógica).

Advierto, sin embargo: Toda contradicción debe ser (lógicamente) contradictoria, no contraria. Si, *v. gr.*, en geometría llegara por demostración a que la suma de los ángulos de un triángulo era 180°, en un caso, y en otro a que era mayor de 180°, no habría en esto contradicción alguna. Los dos resultados pueden estar juntos; más aún que puedo imaginarme un caso en que podríamos emplear un sistema de axiomas de este tipo cuando la suma de los ángulos de un triángulo, determinada mediante un procedimiento, diera un valor, y determinada por

[89] *Op. cit.*, pág. 5. En ediciones posteriores aparece una pequeña variante.

otro, lo diera distinto. Sólo tendré contradicción (lógica) cuando por una regla de sintaxis postule que el producto es una contradicción (lógica). (Comparar más arriba.[89a])

[[*Cálculo y prosa*]]

Es un asombroso error de los matemáticos que muchos de ellos crean que mediante una crítica de los fundamentos podría venirse al suelo algo *en* las matemáticas. Otra parte de los matemáticos tienen este legítimo instinto: ¡Lo que una vez hemos *calculado* no puede ya caer y desaparecer! A lo más lo que podría ser llevado a la desaparición mediante la crítica serían los nombres, las alusiones que se presentan en el cálculo, por consiguiente lo que llamo la *prosa*. Es muy importante saber distinguir muy sutilmente entre el cálculo y esa prosa. Una vez que uno llega a ver clara la distinción, quedan suprimidas cuestiones tales como la incontradictoriedad, independencia, etc.

Frege y Wittgenstein II

WAISMANN formula la diferencia existente entre FREGE y WITTGENSTEIN: Según Frege, existe esta alternativa: Un signo o tiene un significado, esto es, representa un objeto —el signo lógico, al objeto lógico; el signo aritmético, al objeto aritmético—, o bien, es solamente una figura dibujada con tinta sobre el papel.

Sin embargo, no hay razón para semejante alternativa. Existe, como muestra el ajedrez, una tercera opción: El peón del ajedrez no tiene significado en el sentido de que represente algo, de que sea signo *de* algo, ni es solamente una figura de madera labrada que se ve movida sobre el encasillado. Lo que es el peón queda determinado por las reglas del juego.

Este ejemplo nos muestra que no podemos decir: Un signo o lo es de algo o es solamente una figura perceptible pero sin sentido. Hay algo que está correcto en el formalismo y Frege no ha sabido ver ese meollo correcto.[90]

El "significado" del peón es, si se quiere, el conjunto de reglas que rigen para él. Por lo que se puede decir: El significado de un signo numérico es el conjunto de reglas que rigen para él.

[89a] Sin duda, alusión a lo que se dice en las págs. 112 *s.*

[90] Ver págs. 92 *s.* y nota 56.

WITTGENSTEIN asiente.
WAISMANN lee a FREGE, *Grundgesetze der Arithmetik*, II. Parágrafo 107:

> Recordemos ahora que se ha de distinguir la teoría del juego, del propio juego. Las acciones del juego discurren de conformidad con las reglas, pero las reglas no son objetos del juego, sino fundamento de la teoría del juego. Las tiradas del juego son a tenor de las reglas, pero ninguna posición de los trebejos ni ningún movimiento expresa regla alguna, pues el cometido de las piezas del ajedrez no es expresar algo, sino ser movidas de conformidad con las reglas. Si, por consiguiente, se considera la aritmética formal como un juego, entonces la fórmula "$a + a' = a' + a$" es, como expresión de una regla de este juego, una de las bases de su teoría (del juego), gracias a la cual se pueden formar inferencias en ésta; pero no es algo por lo que quepan cambios en el curso del juego, no es un objeto del juego ni se ha de comparar con la disposición de las piezas del ajedrez, sino con la expresión verbal de una regla del ajedrez.

Parágrafo 108:

> Notamos... que aquí las ecuaciones juegan doble papel: primero en el mismo juego, donde, lo mismo que las disposiciones de los trebejos, no expresan nada, y segundo en la teoría del juego, donde tienen que expresar primeramente las reglas y luego las consecuencias de las reglas. Pensemos ahora en lo correlativo con el juego del ajedrez. En ese caso, las reglas del juego quedarían expresadas por grupos de figuras, que también aparecerían en el propio juego... En otras palabras: debería haber un lenguaje cuyo medio de expresión fueran las piezas y su disposición sobre el tablero. Podría suceder entonces que un grupo de piezas se considerara bajo dos aspectos: primero en el propio juego, donde no expresan nada. ; segundo en la teoría del juego, donde serían una tesis, y por consiguiente tendrían un sentido.

Aquí se ve claro que el signo de igualdad es una regla que nos comunica un permiso, a saber, la sustitución de un signo por otro, y también que se trata de una configuración *en* la aritmética.

WITTGENSTEIN señala al respecto: Se puede plantear el problema de la siguiente forma:

Si de las ecuaciones:

$$4 = 2 + 2$$
$$2 = 1 + 1$$

paso a la ecuación

$$4 = (1 + 1) + (1 + 1),$$

se puede preguntar: ¿Hemos llegado a la tercera ecuación *desde* las dos primeras, o desde la primera *mediante* la segunda?

Esto es, ¿son ambas ecuaciones las configuraciones *desde* las cuales y por una inferencia, por ejemplo, hemos llegado a la tercera, o bien, la segunda ecuación expresa la *regla, según* la cual hemos transformado la primera ecuación en la tercera?

Según me parece, en ambos casos indicamos exactamente lo mismo:

(Sé que todo este asunto no es problema esencial para la fundamentación de la aritmética.)

Podría decir: Formo el producto lógico

$$(4 = 2 + 2) . (2 = 1 + 1)$$

y a continuación requiero una regla que me permita escribir la ecuación

$$4 = (1 + 1) + (1 + 1).$$

La expresión de esta regla no puede ser la ecuación $2 = 1 + 1$, lo mismo que en *modus ponens*

$$\frac{\begin{array}{c} p \\ p \supset q \end{array}}{q}$$

la conectiva "$p \supset q$" no es la expresión de la regla de inferencia, pues la regla de inferencia no puede venir expresada mediante una proposición. Luego, tampoco la regla de sustitución puede quedar expresada por la ecuación $2 = 1 + 1$. Podemos muy bien decir: La regla y la ecuación tienen algo en común mutuamente, a saber, la multiplicidad lógica, y *por lo mismo* podemos *proyectar* la regla sobre la ecuación.

Si, pues, pregunto: ¿Cómo he llegado de la ecuación 4 = 2 + 2 a la ecuación 4 = (1 + 1) + (1 + 1)?, puedo responder: mediante una regla que me permite sustituir 2 por 1 + 1. Esa regla, ahora expresada en palabras, y la ecuación 2 = 1 + 1 se corresponden recíprocamente, pero no son idénticas (?).

Domingo, 4 de enero de 1931 (con Schlick)

[[Ecuación y regla de sustitución 1]]

$$\frac{\begin{array}{r} 2+2=4 \\ 1+1=2 \end{array}}{(1+1)+(1+1)=4}$$

¿Puedo decir: He transformado la primera ecuación mediante la segunda —tomada como regla— y de ese modo he conseguido la tercera? Si me expresara así, parecería que una ecuación viene antes que la otra. Pero pienso que ver las cosas de este modo no tiene sentido. Para aclarar esto, imagínense que he escrito las dos primeras ecuaciones y que alguien me preguntara: ¿Cómo procederás? ¿con la primera o con la segunda de las ecuaciones? Cualquiera puede ver que ese no es modo de preguntar. Necesitamos *ambas* ecuaciones, pues una sola no nos basta.

Lo voy a expresar con mayor claridad todavía: Si alguien pensara que sólo una de las dos ecuaciones es la regla, cabría preguntarle: sólo, ¿en contraposición a qué? Puedo decir: He procedido según la regla 1 + 1 = 2, en contraposición —supongamos— a la regla 1 + 1 = 3; he procedido según la regla 2 + 2 = 4, en contraposición a la regla 2 + 2 = 5. Pero no puedo decir: He procedido según la regla 1 + 1 = 2, en contraposición a la regla 2 + 2 = 4, pues estas dos reglas no están en contraposición una con otra. No puedo decir, por consiguiente: He procedido *sólo* según la regla 1 + 1 = 2; lo que nos muestra que las dos ecuaciones son equipolentes * y, por lo

* *Gleichberechtigt* (con igualdad de derechos), lo he traducido por equipolentes (que tienen la misma potestad o potencia), pues me ha parecido que esa palabra viene a significar lo mismo que la alemana. También he traducido por *equipolencia numérica* el término *Gleichzahligkeit*, o valor *existencial* de cualquier número en cuanto tal, independientemente de su valor numérico. [T.]

tanto, ninguna de ellas es expresión de la regla de transformación.

En toda esta consideración hay todavía otra circunstancia que observar y es la que vuelve confusa toda esta cuestión: Imagínese que escribo los siguientes números, unos bajo otros:

1	2	3	4	5
1	4	9	16	25

y pregunto: ¿Han visto cuál es la regla? ¿Sabrían proseguir? "Sí". ¿Pueden, por tanto, emplear la regla? "Sí". ¿Pero la emplean de modo que cada vez están repitiendo en secreto la expresión de la regla? Cuando juegan al ajedrez, por ejemplo, ¿dicen antes de cada tirada la regla correspondiente? "No".

Que pueden entender la regla y emplearla sin recitarla es muy importante. Podría alguien creer que escribir unos números debajo de otros no es todavía la expresión de la regla, sino que ésta se debería expresar, por ejemplo, así:

$$x \qquad ( )$$

o bien así:

$$x^2 \qquad ( )^2$$

Se podría decir que la regla consiste en escribir la serie de los números naturales y debajo *siempre* añadir el cuadrado del número. La regla podría ser algo *general* y esa generalidad no aparece en la formulación original. Pero esto es un error. Las letras no son ciertamente la expresión de la generalidad, pues la generalidad no aparece en los símbolos, sino en la inducción. Cada fórmula del álgebra corresponde a una inducción, pero no expresa la inducción, que es inexpresable.

Si, pues, escribo:

$$x$$
$$x^2$$

no me bastará para saber cómo se ha de emplear la regla; por tanto, con esto no he expresado la regla *general,* sino que de nuevo he formado una determinada configuración de letras, ya que x es un signo tan individual como 1, 2, 3. La regla no se expresa en modo alguno con una única y concreta configuración, ni tampoco, por ende, con la escrita arriba, sino que lo esencial de ella —la generalidad— es inexpresable. La genera-

lidad se muestra en el empleo y debo *verla* en la configuración. La regla general, empero, no puedo verla en la expresión

$$x$$
$$x^2$$

ni mejor ni peor que antes con los números individuales. Debo poder ver la regla en las letras tan bien como en los números, y si no lo logro, de nada me sirven aquéllas.

No he *empleado* la regla

$$x$$
$$x^2$$

con los números particulares, pues si así fuera, requeriría de otra regla que me dijera cómo de lá expresión de las letras puedo deducir la formación de la serie de los números. Y si quisiera establecer esa regla sirviéndome, además, de letras, de nuevo nada habría adelantado: Requeriría todavía otra regla que me dijera cómo emplear aquélla, etc.

La regla no es como el mortero entre dos ladrillos.

No podemos establecer una regla para que podamos emplear otra. No podemos emplear una regla "mediante" otra.

Y por aquí se suele cometer una equivocación especial, que consiste en creer que en lógica se pueden unir dos cosas mediante una tercera, [que algo media]. Uno entonces se imagina dos cosas enlazadas por una cuerda, pero esta imagen lleva a equivocación, pues, ¿cómo se enlaza la cuerda con la cosa? [Las cosas deben unirse directamente entre sí, sin cuerda; o sea, deben estar ya en conexión unas con otras, como los eslabones de una cadena.[90a]]

Por esta idea equivocada, ocurre la dificultad con que se tropieza en la pregunta: ¿Cómo se *puede* emplear la regla? La respuesta parece que debe ser: Otra vez mediante una regla; pero por este medio uno no se mueve de sitio.

Entre la expresión

$$x$$
$$x^2$$

y su empleo con números no se interpone nuevamente una regla, como el mortero entre los ladrillos, sino que debo ver el

[90a] Comparar *TLP* 2,03. (En el hecho atómico los objetos dependen unos de otros como los eslabones de una cadena.)

modo del empleo de la regla ya en la misma expresión. Una vez más, volvamos a nuestra cuestión.

$$\frac{\begin{array}{r} 2 + 2 = 4 \\ 1 + 1 = 2 \end{array}}{(1 + 1) + (1 + 1) = 4}$$

Ninguna de las dos ecuaciones viene antes de la otra y ninguna, por tanto, puede ser expresión de la regla. La regla es más bien la instrucción general: "Siempre que aparezca una expresión en que entre el número 2, puedes sustituir ese 2 por 1 + 1."

$$\frac{\begin{array}{l} f\,(2) \\ 1 + 1 = 2 \end{array}}{f\,(1 + 1)}$$

Ahora vemos qué es propiamente la regla: Tiene relación con todo ese esquema, no es solamente una parte, algo aislado en él.

En la ecuación "1 + 1 = 2" debo ver todo ese esquema; sólo así tengo ante mí la regla. La igualdad aislada no es todavía la regla.

Esto puede aclararse por la analogía existente con el silogismo.

$$\frac{\begin{array}{l} p \\ p \supset q \end{array}}{q}$$

También aquí se suele tomar un miembro del silogismo "p ⊃ q" como expresión de la regla de inferencia, aunque indebidamente. Aislado, "p ⊃ q" en modo alguno expresa la regla de inferencia, pero sí, si se considera referido al esquema fijo y dado una vez por todas. Luego debo pensar siempre "p ⊃ q" como inserto en ese esquema. "p ⊃ q" posee la misma multiplicidad que el esquema (puedo deducir de ahí todo el esquema) y por lo mismo tiene cierta justificación proyectar la regla de inferencia sobre la expresión "p ⊃ q".

De igual forma, puedo proyectar la regla de sustitución

$$\frac{\begin{array}{l} f\,(2) \\ 1 + 1 = 2 \end{array}}{f\,(1 + 1)}$$

sobre el miembro "1 + 1 = 2". Es claro que esta ecuación no expresa la regla, aunque sí la ecuación referida a todo el esquema. (En la ecuación, pues, debo ver algo distinto.)

La ecuación es una regla de sustitución que se emplea también fuera de la aritmética, incluso en las proposiciones de la lengua hablada corrientemente. Puedo decir: 2 manzanas más 2 manzanas es lo mismo que 4 manzanas. Pero es claro que: cuando hablo *de* ecuaciones, por regla de sustitución (regla de transformación) he de entender algo totalmente distinto que cuando me refiero a las reglas de sustitución que son las *propias* ecuaciones.

Que pueda proyectar la regla sobre una ecuación se debe a que ésta tiene el mismo carácter que la regla. Por el contrario, una regla del ajedrez tiene carácter distinto que una disposición en el juego. (A menos que mediante la configuración quisiéramos expresar una regla del juego.)

En realidad, deberíamos servirnos de varios lenguajes. Por un lado deberíamos escribir la ecuación de la aritmética "1 + 1 = 2" y por otro expresar la regla con palabras: " '2' puede sustituirse, siempre que ocurra, por '1 + 1' ". Y aquí las palabras "puede sustituirse" fungen del mismo modo que el signo de igualdad en la aritmética; desempeñan el mismo cometido. Es igual que cuando, en vez de la máquina de cálculo rusa, para hacer una cuenta me sirvo de cifras sobre un papel. Con otros medios, efectuó lo mismo: He repetido la cuenta.

De aquí se deduce que también "1 + 1 = 2" forma la regla sobre la transformación de ecuaciones.

Propiamente, la regla es la relación interna que existe entre las ecuaciones:

$$2 + 2 = 4$$
$$1 + 1 = 2$$

y la ecuación

$$(1 + 1) + (1 + 1) = 4.$$

En cuanto relación interna, no se puede expresar por la configuración del juego.

WAISMANN pregunta a WITTGENSTEIN: Intentemos referir lo dicho al juego del ajedrez. También en este caso se deberá decir: La regla del ajedrez no es el paso de una disposición de las figuras a otra. En los escaques debemos ver la regla, igualmente, en el paso de las configuraciones. Pero aquí no logra-

mos el intento de ver la misma formación una vez como configuración y otra como regla en el juego. Esto ha de tener un motivo y creo que éste posee relación con el empleo de la aritmética, en el sentido de que el empleo de la aritmética también consiste en reglas de sustitución.

WITTGENSTEIN: En efecto. Podríamos expresar las reglas sobre las jugadas con las piezas blancas mediante configuraciones de las negras. (?)

[[*Ecuación y tautología II*]]

Si toda ecuación fuera tautológica, jamás poseería el valor de una regla de sustitución.

La ecuación es una regla de sustitución, lo mismo que la definición.

[[VERIFICACIÓN DE LAS PROPOSICIONES DE LA FÍSICA]]

SCHLICK lanza una "pregunta sencilla": No hay duda de que las proposiciones de la física se pueden comprobar de un modo u otro y esto se puede conseguir de diversa manera, como sucede con la masa y el peso de un electrón, que se pueden saber mediante doce o catorce métodos distintos. Cuando el sentido de una proposición es el método de su comprobación, ¿qué se ha de entender?

¿Cómo es posible que *una* proposición se compruebe de distintos modos? Creo que porque, en ese caso, las leyes de la naturaleza son las que unen esos distintos modos. Es decir, que es basado en la conexión de las leyes naturales como puedo comprobar, de diversas maneras, una proposición. Tomemos un ejemplo sencillo: Supongamos que mido una determinada longitud, una vez aplicando una regla, y otra con visor. De por sí, no tendrían por qué coincidir necesariamente las dos mediciones; si lo hacen, se manifiesta en esto una ley de la naturaleza. (?) ¿Hasta qué punto he determinado "lo mismo" en los dos casos?

WITTGENSTEIN: ¡Un momento! Esto no ocurre solamente en la ciencia, sino también en la vida diaria. Oigo, por ejemplo, que en el cuarto contiguo alguien está tocando el piano y digo: "Mi hermano está ahí." [90b] Si alguien me preguntara cómo lo

[90b] Wittgenstein se refiere a su hermano que, en efecto, era pianista.

sé, le podría responder: "Él me había dicho que a esta hora estaría en esa habitación". o bien: "Conozco su modo de tocar". O bien: "Antes he oído unos pasos que son como los suyos", etc. Aquí también parece que he comprobado la misma proposición cada vez de distinta manera. Pero en realidad no es así. Lo que he comprobado son diversos "síntomas" de algo distinto. (Los he llamado "síntomas" en mi manuscrito.[91]) El tocar, los pasos, etc. son síntomas de la presencia de mi hermano.

Hipótesis II

Creo que es muy importante, y que aclarará la cosa, tener presente que las ecuaciones de la física no son proposiciones, sino *hipótesis*. Lo que observamos son los "cortes" individuales al través de las hipótesis, y ciertamente se trata esencialmente de distintos cortes, es decir, no solamente cortes en distintos lugares y a distintos tiempos, sino cortes de forma lógica distinta, por tanto de cosas totalmente distintas. Lo que podemos comprobar es siempre sólo *un* corte. La hipótesis es lo que une esos diversos cortes unos con otros (al igual como una curva une diferentes puntos). En los casos, pues, en que parece que hemos comprobado la misma proposición, aunque de diversa manera, en realidad hemos comprobado diversos cortes de la misma hipótesis.

Toda hipótesis posee siempre diversos flancos o diversos puntos, como si fuera un cuerpo tridimensional que se puede proyectar de diversas maneras. Para poder responder a su pregunta es muy importante, por consiguiente, que se trate en todos los ejemplos solamente de *hipótesis*.

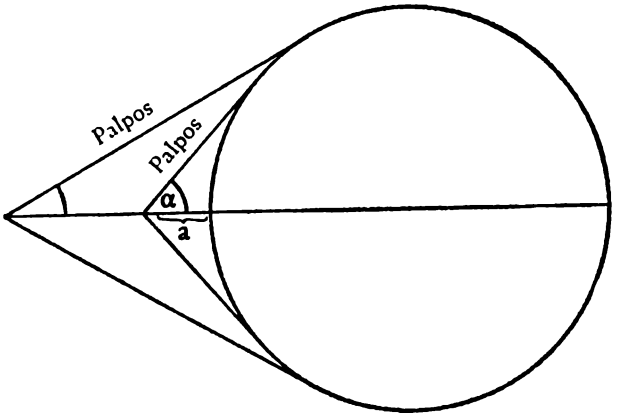
Aclararé este asunto por medio de un ejemplo: Imagínense un ser que tuviera un sentido que le permitiera medir ángulos, como hacemos nosotros mediante los ojos, [que, además, pueden medir lejanías], y que también poseyera dos palpos con que tocara los ángulos.

Supongamos ahora que dicho organismo conjuntara determinadas experiencias, lograra algunas medidas, advirtiera proposiciones y todo eso se lo llevara a su lugar en un sistema de coordenadas. Podría describir sus experiencias de este modo: *"Una esfera se movió hacia mí."*

Imaginemos que careciera de la experiencia que le proporcionan los palpos; entonces todo quedaría en lo bidimensio-

[91] Se hace alusión a esta enseñanza en *PhB*, págs. 200 y 238.

nal: un círculo en el campo de la visión que se va acercando. Pero en el caso de que faltaran las experiencias con los palpos podría suponerlas mediante la hipótesis de la esfera.



Con la hipótesis, pues, suponemos *más* de lo que se nos exige en la tarea de describir la experiencia inmediata. La hipótesis tiene también una rueda suelta: Mientras no se presenten más experiencias, la rueda queda inutilizada, pero se pondrá en acción no bien haya ocasión de introducir más experiencias. (Sucede lo mismo que con los diferenciales: En cuanto muevo una rueda, se genera un movimiento bien determinado.)

La hipótesis cuenta con *más* de lo que se transmite en un modo de experiencia (por ejemplo, en la medición de ángulos o de lejanías, sin la experiencia de las antenas). ¿Qué nos da la hipótesis? Si recibimos la experiencia de que el círculo se nos acerca, diremos: Esperamos que podremos realizar ahora una experiencia bien determinada, aunque de diversa forma.

Las hipótesis de la física están conformadas de manera que logran poner en recíproca relación buen número de experiencias de naturaleza distinta. Lo que une es la hipótesis.

El principio general al respecto es éste:

Lo que se comprueba de modo diverso es más que lo que se comprueba por modo único.

Es decir, cuando afirmamos que hemos comprobado "lo mismo" de modo diverso, el "lo mismo" implica más que cuando comprobamos por un modo único.

Desde luego que en cada observación individual compruebo algo distinto. Ni existe necesidad lógica alguna de que, con la

comprobación de una proposición, se verifique también otra. Puedo muy bien, *v. gr.*, imaginarme que pudiera ver un jacinto pero que no lograra recibir sensación táctil al tocarlo, o bien, que al aplicar la escala obtuviera un resultado distinto que al servirme del visor. Los fenómenos son como distintas "facetas" que se enlazan mediante la hipótesis.

WAISMANN pregunta a WITTGENSTEIN: Siempre he entendido así este asunto: Si tengo que medir la distancia AB, puedo aplicar una escala y medir AB, o bien, desde un punto C, visar A y B, medir las distancias AC y BC y calcular AB por el valor del coseno. Ahora bien, ¿he comprobado la aserción "La distancia AB tiene esta longitud" de modo distinto? Depende de lo que se quiera entender por "medir". Si por "medir" entiendo el proceso de la aplicación repetida de las escalas, del visar, de la determinación de la coincidencia, etcétera, entonces tengo dos distintos informes provenientes de mi persona y es cuestión de experiencia que los resultados estén conformes. Pero otro es el caso si parto de los axiomas de la geometría euclídea o si describo los resultados de la medición con un lenguaje cuya sintaxis está bien fijada. Si, en este caso, apareciera una discrepancia, ¿diré que el coseno está equivocado y que la geometría euclídea se contradice? No; nos atendríamos a la geometría euclídea y buscaríamos la razón de la discrepancia en las condiciones físicas de nuestros instrumentos. Diríamos: Se ha deformado nuestro instrumento, se ha introducido un campo de fuerzas, la medición fue inexacta, el rayo de luz se tergiversó, etcétera. O sea: Tomamos las proposiciones de la geometría como reglas de sintaxis. Una regla de sintaxis fija cuándo son equivalentes dos métodos de verificación.

WITTGENSTEIN: Si bajo "espacio" entiendo el espacio visual, entonces la geometría es la gramática de las palabras con que describo los fenómenos.

Pero si bajo "espacio" entiendo el espacio físico, entonces la geometría, al igual que la física, es una hipótesis, y se encomienda a las experiencias de la medición.

[[*La geometría como sintaxis III*]]

WAISMANN: Nos dijo en otra ocasión, hace un año, cuando nos aclaraba estas cosas, que la geometría era sintaxis. Einstein dijo: La geometría describe las posibilidades de situación de los cuerpos sólidos.[92]

[92] Véase más arriba, pág. 33 y nota 2, y pág. 55.

Si las posiciones reales de los cuerpos sólidos se han de describir mediante las proposiciones de un lenguaje, entonces las posibilidades de situación sólo pueden corresponder a ese lenguaje. Así, pues, ¿hasta qué punto podemos tomar la geometría como hipótesis? ¿Hasta qué punto podemos tomar, por ejemplo, la tridimensionalidad del espacio como una hipótesis?

WITTGENSTEIN: La geometría no es algo autónomo, sino que se complementa con la física. Por consiguente, es *parte* de una hipótesis. Podré fijar esta parte, si procuro orientar lo demás de modo que consiga concordancia con la experiencia. A tal parte prefijada de la hipótesis le doy el nombre de *postulado*.

Solamente podemos postular una cosa en el mundo: nuestro modo de expresión; el comportamiento de las cosas no lo podemos postular. Puedo decir, por tanto: Cuando expongo un postulado, fijo con ello la sintaxis en que expreso la hipótesis. No hago sino escoger un sistema de explanación. Así, pues, no existe contraposición entre la concepción de la geometría como parte de una hipótesis y como sintaxis.

También puedo concebir la tridimensionalidad como hipótesis.

Si la quisiera cambiar, me encontraría con que, en todo caso, algo en algún lugar se alteraría también, como si fuera su compensación. Algo tendría yo que expresar también de diferente manera. Lo que se quita aquí, debe aparecer en algún otro lugar.

SUPLEMENTOS [93]

Ajedrez [94]

El *significado* del juego del ajedrez es aquello que tienen en común todos los juegos de ajedrez.

Si en matemáticas nada tienen que ver los trazos con la tinta, tampoco importa el aspecto de las piezas en el ajedrez. ¿Haría impresión en el adversario si dijera: "Tengo una reina que causa espanto con sus ojos en ascuas", etcétera?

[93] Del tercero de estos Suplementos se deduce que provienen de Wittgenstein y no de Waismann. Quizás contengan lo que Wittgenstein había respondido mientras Waismann le preguntaba sobre puntos discutidos antes. Véase "Prefacio de la edición alemana", págs. 19 *s*.

[94] Repetición sin cambios esenciales, de las págs. 91 *s* (parte de la discusión de Wittgenstein sobre "Lo que se tenía que haber dicho en Königsberg").

El juego y su conocimiento se distinguen solamente por su empleo. Si en Marte sus habitantes se hicieran la guerra como nosotros jugamos al ajedrez, entonces las reglas ganarían inmediatamente seria importancia y el Estado Mayor se ocuparía del ajedrez como con la topografía ahora.

Referente a Königsberg[95]

¿Qué es una cuestión matemática?

Parece como si hoy se quisieran hacer entrar en los libros de texto de matemáticas dos elementos totalmente distintos: El cálculo y algo que aparenta querer ser la justificación del cálculo. Pero esto segundo desaparece en cuanto llegamos al cálculo. Aquello que desaparece es la descripción aparente.

Lo que importa en una máquina es que las ruedas engranen perfectamente, no el color que tengan. Lo mismo ocurre con el estudio de las cantidades. La palabra "infinito" es tan secundaria como la capa de pintura que pueda tener una rueda. Solamente es esencial el cálculo.

Definición de número[96]

A mis oyentes de Cambridge les expliqué este asunto así: Imagínense que tengo una docena de tazas y que quisiera comunicarles que también poseo otras tantas cucharas. ¿Cómo podría hacerlo?

Si dijera que he repartido las cucharas entre las tazas, no expresaría lo que quiero decir cuando digo que tengo tantas cucharas como tazas. Sería mejor decir: *Puedo* repartir las cucharas entre las tazas. ¿Pero qué quiere decir aquí la palabra "puedo"? Si la tomo en sentido físico, vengo a decir que tengo la fuerza física para poder repartir las cucharas entre las tazas, a lo que me replicarían: Bien sabemos que puedes. Pero lo que intento decir es a todas luces: Puedo repartir las cucharas, porque tengo el debido número de ellas. Para poder acla-

[95] No se han publicado aquí siete párrafos que repiten palabra por palabra la primera parte de "Lo que se tenía que haber dicho en Königsberg" (Véase págs. 90 *ss.*)

[96] Las ideas de este suplemento parecen ser nuevas, en lo que se refieren a las conversaciones habidas en Viena. Waismann escribió varias interpretaciones sobre este argumento; la última, con un reconocimiento a Wittgenstein, apareció en *Einführung in das mathematische Denken*, Viena, 1947, págs. 77-80. (Comparar con págs. 148 *s.*)

rar esto, debo ante todo presuponer el concepto de número. No es: el orden fija al número, sino que el número permite el orden. Por lo mismo, no se puede explicar un número por el orden (equipolencia numérica, *Gleichzahligkeit*). No se ha de explicar el número por el orden, sino por la posibilidad del orden, y ésta presupone el número.

No se puede basar el concepto de número en el orden.

Frege ha dicho: "La recta ya está tirada, antes de trazarse." [97] Este dicho suena a paradójico. Se refiere a la distinción que hace entre "objetivo" y "real".[98]

Lo que quiere decir Frege es esto, sin duda: Naturalmente que es posible tirar una recta, pero la posibilidad no es todavía la realidad; solamente cuando se ha tirado la recta, se ha tirado. Y lo mismo sucede con el número: Cuando Frege y Russell pretenden definir el número mediante el ordenamiento, es como si se dijera:

Solamente cuando se ha *establecido* el orden, existe el número. Frege advertía: Cuando dos cantidades contienen igual número de elementos, existe también un orden. (Como si: una vez que tenemos dos puntos, ya existe una recta que los une.) ¡Ni por asomo! El orden está cuando ordeno las cantidades unas tras otras, esto es, cuando doy las relaciones correspondientes. Si en todo esto se quería indicar la *posibilidad* del ordenamiento, entonces se presupone el concepto de la existencia del número. No se gana nada, por lo tanto, con pretender fundar el número en el ordenamiento.

Cuando Russell enumera colores, ha de entender por orden lo que se da por medio de una *lista*. Y Russell quería decir, en efecto, que siempre existe un orden, el que proviene de la identidad.[99] (?)

Cuando cae la identidad no queda nada.

[97] Compárese con *Grundgesetze der Arithmetik* I, Jena, 1893, pág. 88, donde Frege dice que cuando ordenamos dos conceptos uno tras otro, hacemos algo parecido a cuando en geometría tiramos una línea auxiliar. Ese trazo equivale a un hacer. "Traemos a la conciencia, captamos, lo que ya estaba." (Esta nota la debo al profr. P. T. Geach.)

[98] Por ejemplo, en *Grundlagen der Arithmetik*, Breslau, 1884, pág. 35.

[99] Si se tienen dos listas (naturalmente, finitas) con igual número de miembros, se puede proceder a un ordenamiento entre ellas, mediante la relación de identidad. No he podido encontrar esta observación en las obras de Russell. Compárese, con todo, con la nota de la pág. 214 más adelante.

V

Lunes, 21 de septiembre de 1931 (Argentinierstrasse, entonces [[en esa]] calle [100])

WITTGENSTEIN muestra a WAISMANN su manuscrito a máquina y hace observaciones respecto a los signos que en él emplea.[100a] Cuando una palabra aparece subrayada así ——— quiere decir que Wittgenstein está en duda de si debe quedar o desaparecer.[100b] Le parecería bien cambiarla, pero por algún sentimiento oscuro la ha preferido, por más que muchas veces resulte un alemán horroroso. Las frases están muy revueltas, aunque a Wittgenstein no le importa, pues se ha de llevar el trabajo a Inglaterra y reelaborarlo allí. Es un extracto de los libros manuscritos (hasta ahora 90 páginas).

INTENCIÓN, REFERIRSE, SIGNIFICAR

WAISMANN lee al azar la frase:
"Cuando decías esto, ¿pensabas ya en Napoleón?"
"Pensaba en lo que decía." [100c]

WAISMANN pregunta a WITTGENSTEIN: ¿Quiere decir que la proposición se extiende más allá de lo que dice y que toca también otras cosas?

WITTGENSTEIN: Se lo voy a aclarar. En este trabajo me vuelvo a ocupar de la cuestión qué es *entender* una proposición; lo que está en conexión con la cuestión general: a qué se llama *intención, referirse, significar.* Es común creer hoy que el entender es un proceso psicológico que se desarrolla "en mí". Pero ahora pregunto: ¿Es el entender un proceso que abarca toda la proposición, hablada o escrita? ¿Qué estructura tiene

100 Nombre de la casa urbana de la familia Wittgenstein y que a la sazón ocupaban la hermana mayor de Wittgenstein, Hermine, y su hermano Paul. Parece que en esta ocasión no se hallaba Schlick, porque habría partido ya para América.

100a Muy probablemente son las primeras hojas de *EM,* donde se discuten muchos de los temas de esta conversación.

100b Este era el procedimiento usual de Wittgenstein.

100c Este lugar aparece con alguna variante en el tomo VII de los *MS* (1931), en la pág. 17 de *EM* y, posteriormente, también en el parágrafo 53 de *PhGr.*

entonces ese proceso? ¿Acaso la misma que la proposición? ¿O es dicho proceso algo amorfo, acaso algo así como cuando leo la proposición y me viene en ese momento dolor de dientes?

Ahora creo, por el contrario, que el entender no es ningún proceso psicológico especial; cuanto se presenta va dirigido a la percepción de la imagen proposicional. Cuando leo u oigo una proposición se desencadenan inmediatamente diversos procesos dentro de mí. Aflora una imagen representativa, aparecen asociaciones, etc. Pero no son estos procesos los que me interesan ahora. Entiendo la proposición cuando la *empleo*. El entender no es un proceso especial, sino el operar con la proposición. *La proposición se nos presenta para que operemos con ella.* (Incluso esto que hago es una operación.)

El concepto que ahora quisiera rebatir a este respecto es el de que en el entender se trate de una *situación* que existe en mí, como por ejemplo el dolor de dientes. Que el entender nada tiene que ver con una situación se ve claro cuando se pregunta: "¿Entiendes la palabra Napoleón?" "Sí". "¿Te refieres al vencedor de Austerlitz?" "Sí". "¿A esto te has referido en todo el rato?" A todas luces no tiene sentido preguntar si me he referido a esto durante todo el rato sin parar, como si fuera una pregunta como: ¿Has tenido dolor de dientes todo el rato sin parar? Ahora bien: Me he dado cuenta del significado de "Napoleón" del mismo modo como me doy cuenta de que $2 + 2 = 4$; a saber, no en forma de una situación, sino en forma de una disposición. Si yo hubiera empleado el pretérito —"Me refería al vencedor de Austerlitz"— no habría aludido al referirse, sino a que ya había expresado antes esa proposición. No tiene sentido suponer que en un determinado momento llego a entender la palabra "Napoleón". Pues entonces cabría preguntar: *¿Cuándo* la entendí? ¿Ya en la primera N? ¿O sólo después de la primera sílaba? ¿O bien al concluir toda la palabra? Sería divertido que fueran auténticas preguntas.

El entender una palabra o una proposición es un calcular. (?)

WAISMANN: Pero el empleo que usted ha hecho aquí de la palabra cálculo es nuevo. Antes siempre había hecho hincapié en la distinción entre cálculo y teoría. Decía usted: ¿Cuál es la distinción entre cálculo y teoría? Sencillamente ésta: que la teoría describe algo, mientras que el cálculo no describe nada sino que es.[101]

[101] Véase más arriba, págs. 111 *s* y 118 *ss.*

WITTGENSTEIN: No debe olvidar que ahora no hablo de proposiciones, sino del manejo de los signos. Digo: El modo como empleamos los signos forma el cálculo, y esto lo digo adrede. Existe sin duda entre el modo como empleamos nuestras palabras en el idioma y un cálculo, no solamente una analogía sin más, sino que puedo tomar el concepto del cálculo de tal manera que el empleo de las palabras caiga dentro de ese concepto. Voy a explicar qué estoy indicando. Tengo aquí una botella de bencina. ¿Para qué me sirve? Por ahora para limpiar. En ella hay una etiqueta con el escrito "Bencina". ¿Para qué está esa etiqueta? Limpio con la bencina, mas no con la etiqueta. (Está claro que en vez de esa etiqueta podría haber cualquier otra.) Pues bien, esa etiqueta es un punto de ataque *(Angriffspunkt)* para un cálculo; es decir, para el empleo. Y así le puedo decir: "Tome la bencina." Y por esa etiqueta se da allí una regla por la que usted puede proceder. Si toma la bencina, está usted efectuando un paso en aquel cálculo que le viene prefijado por las reglas. A todo el conjunto lo llamo cálculo, porque se dan dos posibilidades; a saber, que usted proceda a tenor de la regla o que no proceda según ella, pero en este caso me colocaría usted en la contingencia de decirle: "Pues, mire, lo que ha tomado no es la bencina."

Los nombres que empleamos en la vida diaria vienen a ser como letreritos que colgamos a las cosas y que nos sirven como puntos de ataque *(Angriffspunkte)* para un cálculo. Me puedo colgar, por ejemplo, un cartelito con el nombre "Wittgenstein"; usted puede llevar otro con la etiqueta "Waismann". Pero en vez de esto, puedo efectuar otra cosa: Señalar con el brazo a cada uno, aquí y allá, y decir: El señor Müller, el señor Waismann, el señor Meier. Con este sistema me he fabricado de nuevo puntos de ataque de un cálculo. Si le digo: Señor Waismann, vaya usted a la (calle) Fruchtgasse. ¿Qué quiero decir? Que allí cuelga un cartelito con la inscripción "Fruchtgasse".[102] Sólo así me será dado asegurar si lo que usted realiza está correcto o no.

WAISMANN: El significado de una palabra es el modo de su empleo. Cuando doy nombre a una cosa, no establezco una asociación entre la cosa y la palabra, sino que señalo una regla para el empleo de esa palabra. La llamada "relación intencional" se reduce a estas reglas. En realidad no existe relación al-

102 Waismann vivía en la Fruchtgasse. No parece que los tales señor Müller y señor Meier fueran personas reales.

guna aquí, y si se habla de relación no pasa de ser una locución infeliz.

WITTGENSTEIN: Sí y no. Es un asunto complicado. En cierto sentido, se puede decir que sí existe tal relación. Se trata de una relación precisamente del mismo tipo que la existente entre dos signos que estuvieran contiguos en una tablilla. Podría señalar con el brazo hacia usted y hacia mí y decir: el señor Waismann, el señor Wittgenstein. (?)

Podría emplear un cálculo en que el señor Meier y el señor Waismann fueran permutables, lo mismo que la Fruchtgasse y la (plaza) Stephansplatz, exactamente igual como son permutables 3×5 y 15.

Lo que realizo con las palabras del lenguaje (mientras las *entienda*) es exactamente lo mismo que efectúo con los signos en el cálculo: opero con ellos. Que en un caso emplee procedimientos y en el otro solamente escriba o borre signos es indiferente, pues también lo que llevo a cabo en el cálculo es un procedimiento. *No existe aquí frontera bien delimitada.*

[[CÁLCULO Y EMPLEO]]

¿Qué diferencia existe entre el lenguaje (M) [103] y un juego? Se dirá: Que el juego cesa cuando empieza lo serio, y que lo serio es el empleo. Pero esto no está bien expresado. Mejor se debería decir: Juego es lo que no es ni serio ni es broma. Hablamos de algo serio cuando empleamos los resultados del cálculo en la vida diaria. Empleo, *v. gr.*, mil veces todos los días la multiplicación $8 \times 7 = 56$, y por esto es algo serio. Sin embargo, en sí y para sí, esa multiplicación no se diferencia en lo más mínimo de cualquier otra que efectúe por pasar el rato. Si en la misma cuenta no está la diferencia, entonces no se puede saber por el cálculo si es en serio o nos sirve de entretenimiento. No podré decir, por consiguiente: Un cálculo es juego cuando me da solaz, sino solamente: Un cálculo es juego cuando lo *puedo tomar* de modo que me procure esparcimiento. Mas en el cálculo no existe la relación a la seriedad ni a la recreación.

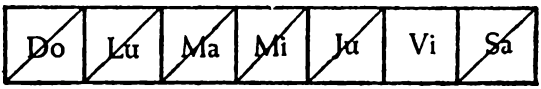
Pensemos en el juego del ajedrez. Lo tomamos siempre como un juego, pero puesto el caso que se diera una guerra en que las tropas lucharan en un prado que tuviera el aspecto de un encasillado, y que perdiera la batalla aquel ejército al que se le

[103] Quizás "de las matemáticas".

diera mate, entonces los oficiales se encorvarían sobre el tablero del ajedrez como ahora lo hacen sobre los mapas del Estado Mayor. El ajedrez ya no sería un juego, sino algo serio.[104]

[[Consultar el calendario]]

Calculo cuándo estaré libre, mientras consulto el calendario. Se trata de un cálculo como puede serlo ∫sen x dx.



¿Qué tiene que ver que al contemplar la figura que veo allí cite a alguien para el viernes? Diremos otra vez: Empleo la figura igual que los signos en un cálculo, como puntos de ataque para el obrar. También consultar el calendario constituye un cálculo, pues yo opero con la figura, y que vaya a ver a alguien o acceda a que alguien me visite son pasos dentro del cálculo.

Construcción de una caldera de vapor[105]

¿Por qué se piensa en el grosor y se calculan las dimensiones que ha de tener una caldera de vapor y no se deja todo al azar? ¿Nos salvaguarda el cálculo de que la caldera estalle? No, pues la caldera puede estallar a pesar del cálculo. Pero de igual modo como una persona no deja la mano en el fuego una vez que se ha quemado, tampoco se renuncia a calcular lo referente a la caldera. Hay que decir lo siguiente: Echar cuentas sobre las dimensiones es naturalmente un cálculo, pues parto de unos datos, sumo, multiplico,

$$\begin{array}{r} 28 \times 773 \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

[104] Véase más arriba, págs. 92 y 144.
[105] Compárense: *PhU*, parágrafo 466; *EM*, págs. 68 *ss.*, 84.

y si el resultado final es 15, construiré la caldera con un grosor de 15 mm. Podría haber calculado con proposiciones solas en vez de haberlo hecho con números, en el cual caso habría calculado con proposiciones. Que me haya servido de números supone solamente una abreviación, pues un mismo cálculo tiene 1 000 distintas conexiones; es decir, que 1 000 distintos cálculos a base de proposiciones tienen solamente ese trocito en común.

También es importante lo siguiente: Una vez que he conseguido el resultado de 15 y paso a construir la caldera con 15 mm de grosor en sus paredes, la construcción es *de nuevo un paso en ese cálculo* y no otra cosa. [Cálculo y construcción técnica son afines. Son distintas partes de un cálculo.] [1]

Si alguien me preguntara: ¿Has tenido alguna razón para construir una caldera de 15 mm? ¿Puedes dormir tranquilo? Respondería con esta contrapregunta: ¿Qué quiere decir en este caso "razón"? ¿Significa que es imposible que estalle la caldera? Entonces no he tenido ninguna razón. Pero si con "razón" se quiere señalar que he calculado la caldera que se me daba en ese cálculo, entonces sí he tenido razón. Más ya no se puede decir al respecto.

Demostración de la existencia

Si una vez, sirviéndome por ejemplo de una de las demostraciones de Gauss,* demostrara que una ecuación de n grados tiene n soluciones, y otra vez demostrara su existencia dando el procedimiento para llegar a las soluciones, no habría presentado dos demostraciones diversas para la misma proposición, sino que habría demostrado dos cosas totalmente distintas. Es común solamente la proposición de la prosa: "Hay n soluciones", lo que de por sí no significa nada, ya que tal expresión

---

1] Waismann pregunta a Wittgenstein: Creo que, en este sentido, toda operación es un cálculo. La operación se distingue del simple recorrido en que procede por reglas; es decir, es parte de un cálculo.

Wittgenstein: Quizá sea así. No sé.

* Gauss (1777-1855). Gran matemático, de la altura de Arquímedes y Newton. Son muchísimos sus descubrimientos en ciencias exactas, y su influencia ha sido decisiva en las matemáticas posteriores a él. Se trata, además, de un caso de precocidad, pues la mayoría de sus descubrimientos los realizó cuando era adolescente. [T.]

sólo hace las veces de abreviatura de la demostración. Si las demostraciones son diferentes, también cada proposición *significará* algo diferente.[106] Que en ambos casos se hable de "existencia" tiene su fundamento en que la demostración de la existencia de las soluciones posee cierto parentesco con el procedimiento de la formación de las soluciones. Pero de por sí, no se ha de entender la palabra "Hay" en el mismo sentido como en la vida diaria se entiende al decir, pongamos por caso: "Hay un hombre en esta habitación."

La demostración demuestra solamente lo que demuestra, y nada más.[107]

[La palabra "Hay" pertenece asimismo a un cálculo, aunque diferente que cuando se emplea el mismo vocablo en el lenguaje corriente.]

[[Incontradictoriedad VI]]

La contradicción solapada

Waismann pregunta a Wittgenstein: Tengo intención de insertar en mi trabajo [107a] lo que usted nos aclaró acerca de la incontradictoriedad, pero me encuentro con una dificultad. Decía usted que en el cálculo no se da contradicción alguna.[108] No comprendo ahora cómo rima esto con la esencia de la demostración indirecta, pues esta demostración está precisamente por si en el cálculo surge alguna contradicción.

Wittgenstein: Lo que decía no tiene relación alguna con la demostración indirecta. Hay una confusión a este respecto. Claro que hay contradicciones en el cálculo, pero lo que yo quería decir era solamente esto: Que no tiene sentido hablar de una *contradicción solapada.*[108a] ¿Qué sería una contradicción oculta? Puedo decir, por ejemplo, que la divisibilidad del número 357 567 por 7 está oculta, mientras no haya empleado el criterio,* es decir, la regla de la divisibilidad. Para convertir la divisibilidad oculta en patente no tengo más que emplear el

106 Véase más arriba, pág. 96.

107 Véase más arriba, págs. 29 *s.* y 96 *ss.*

107a Prueba de que por ese tiempo Waismann tenía que publicar las ideas de Wittgenstein.

108 Véase más arriba, págs. 105 *s.*

108a Véase más arriba, pág. 106.

* Resulta confuso el sentido que Wittgenstein da siempre al vocablo *criterio.* [T.]

criterio. ¿Ocurre otro tanto con la contradicción? Claramente no. No puedo sacar a luz una contradicción empleando el criterio, por eso digo que no tiene sentido hablar de contradicción oculta, y el peligro de que hablan los matemáticos acerca de que podría existir escondida alguna contradicción en las matemáticas de hoy, como si se tratara de una enfermedad larvada, ese peligro es pura imaginación.

Alguien podría preguntar: ¿Qué pasaría si un día se diera con un método para descubrir la existencia o no existencia de una contradicción? Este asunto es muy curioso. Es como si un día las matemáticas pudieran llegar a una situación determinada, la situación de que se hallara ese método. También yo podría preguntar si en esta habitación, por ejemplo, han encontrado a un hombre pelirrojo; esta pregunta tendría su bonita razón, pues puedo describir al hombre aunque no esté. Por el contrario, no puedo hablar de un método para la determinación de contradicciones, puesto que solamente lo podré describir una vez que lo haya encontrado, y mientras no lo encuentre me es imposible describirlo, y todo lo que quiera decir son palabras vacías. Tampoco puedo lanzar la pregunta sobre qué sucedería si se descubriera ese método.

Sucede con el método para el descubrimiento de una contradicción lo mismo que con el teorema de Goldbach: * Es como el intento de construcción de un cálculo. Si resulta el intento, tengo ante mí de nuevo un cálculo, aunque diferente del que he empleado hasta el momento. Pero yo no he demostrado *que el cálculo es un cálculo,* cosa que tampoco puede demostrar nadie.

Si alguien quisiera describir lo relativo a los números racionales diciendo que había descubierto que entre los puntos racionales de una recta se encontraban también otros puntos, le podríamos responder: No has descubierto nuevos puntos entre los que ya teníamos antes, sino que has formado nuevos puntos; y con ello tienes un nuevo cálculo.

Y lo mismo habría que decir a Hilbert cuando supone que es un *descubrimiento* que las matemáticas estén libres de contradicción. En realidad lo que pasa es que Hilbert no constata nada, sino que determina; determina un nuevo cálculo.

* Goldbach, matemático ruso. En 1742 postuló que todo número par mayor de 2 es la suma de dos números primos. Aunque Wittgenstein habla del teorema *(Satz)* de Goldbach, más propiamente es una *conjetura,* y se ha de tener por verdadera, pues todavía no se le ha encontrado excepción. [T.]

Cuando Hilbert dice: "o≠o" no debe considerarse fórmula demostrable,[109] está estableciendo un nuevo cálculo, al servirse de la permisión o de la prohibición.

Contradicción

Waismann pregunta a Wittgenstein: Decía usted también que en el cálculo mismo no puede aparecer contradicción, sino solamente en las reglas, y que las configuraciones no podían explicitar ninguna contradicción.[110] ¿Todavía sostiene la misma opinión?

Wittgenstein: Debo decir que también las reglas forman un cálculo, aunque diferente. Pero lo principal es que nos pongamos de acuerdo sobre el concepto de contradicción, pues si usted entiende por contradicción algo diverso de lo que yo entiendo, no podremos concordar nunca.

La palabra "contradicción" la hemos tomado de donde todos la empleamos, a saber, de las funciones de verdad, donde viene a significar que: "p.~p". Consiguientemente, sólo se podrá hablar de contradicción donde se trate de aserciones. Puesto que las fórmulas del cálculo no son aserciones, no puede haber contradicción en él. Sin embargo, se puede encontrar una modalidad, según la cual determinada configuración, pongamos por caso "o≠o", se la considere contradictoria. Existe, no obstante, el peligro de pensar en este caso en la contradicción de la lógica y, por ende, confundir los conceptos "contradicción" y "prohibido". Siempre que en el cálculo me encuentre con una determinada configuración de signos calificada de contradicción, significa solamente que no está permitida la formación de tal configuración: Si en el proceso de una demostración se topa uno con semejante fórmula, se ha de hacer algo; por ejemplo, se deberá obliterar la fórmula de partida.

Para obviar esta confusión sugeriría el empleo de un signo totalmente nuevo que no nos trajera a la mente nada más, en vez de la palabra "contradicción". Dicho signo podría ser Z. *En el cálculo no hay nada que se sobreentienda.* Cuando apareciera la fórmula Z, no significaría nada todavía: Deberíamos esperar a que se nos dieran otras determinaciones.

Se deduce de todo esto que de ninguna manera está justificado ver en la "contradicción" algo que sea tabú, como si se indicara: Cuando salga tal fórmula hay que andar con cuidado.

109 *Op. cit.* (Véase más arriba, pág. 105, nota 69.)
110 Véase más arriba, págs. 109 *ss.*

A propósito: Cuando Hilbert llama contradicción a la fórmula "o≠o", lo hace porque tiene de la contradicción un concepto diferente del que tenemos nosotros dos; a saber: "p.~p". El viene a decir: Por un lado está que o=o y por otro que o≠o, y estas dos fórmulas se contradicen recíprocamente, exactamente igual que si en el ajedrez se dijera: El alfil debe correr derecho, y: El alfil no debe correr derecho.

WAISMANN: ¿Me permite que formule este asunto de manera un poco diversa? Las palabras "correcto" e "incorrecto" tienen significado diferente según se empleen con demostraciones o con fórmulas. Una demostración es correcta si se ha llevado a cabo de acuerdo con las reglas del juego, e incorrecta cuando contiene alguna contravención a las reglas. La fórmula está correcta cuando aparece como resultado de una demostración llevada a cabo correctamente. Pero no se puede decir: Una fórmula es incorrecta cuando es el resultado de una demostración incorrecta. En este caso solamente se puede decir que no ha demostrado. Por lo tanto, debo seguir una reglamentación nueva para poder llamar incorrecta una fórmula. En la aritmética puede consistir en que afirme por ejemplo: Una fórmula se considerará incorrecta cuando de ella se pueda deducir la fórmula "o≠o". Ahora bien, pienso que aunque se entiendan en este sentido las expresiones correcto e incorrecto, no se comportan como afirmación o negación, puesto que puede muy bien ser que una fórmula sea a la vez correcta e incorrecta, pues significaría sólo que de las fórmulas básicas únicamente se puede deducir la fórmula "o≠o". —Hasta aquí llega, según creo, la analogía con el juego del ajedrez. En él sólo puedo preguntar si una tirada fue correcta; a lo que corresponde en matemáticas la pregunta sobre si un determinado paso de la demostración fue correcto. Por el contrario, en la aritmética cabe un cometido que no conoce el ajedrez: probar si una fórmula es correcta o no.

WITTGENSTEIN: Tiene toda la razón al decir que necesitamos seguir otra reglamentación para poder llamar incorrecta una fórmula. Pero, de proceder como usted sugiere, se emplearían mal las palabras, pues desde siempre "incorrecto" ha sido la negación de "correcto". Aunque podríamos salir del paso perfectamente ingeniando otras expresiones; entonces no podría haber inconveniente en emplear esas reglamentaciones.

¿Cómo se puede empezar a determinar que una fórmula es errónea? ¿Por ejemplo, la fórmula 7x5=30? ¿Cómo sabemos que si 7x5=35, no puede ser también igual a 31? ¿Qué replicaría-

mos si alguien nos dijera que: "8x7=75"? Le diríamos: "Pero ¿qué estás haciendo? ¡Eso está equivocado!" Y si nos respondiera: "¿Cómo? Así lo he determinado", le repondríamos: "Pues habrás empleado un cálculo diferente del que llamamos multiplicación. No conocemos tu cálculo, pues si procedemos según las reglas que nos han enseñado, 8x7=56 y no a 75; y ésta es la refutación."

Si alguien dice que 8x7=75, tiene tanto y tan poco derecho como a tomar la palabra "mesa" en sentido diferente. Toda definición es arbitraria, pero a pesar de todo se puede decir que una definición está equivocada cuando no reproduce lo que se intenta en realidad. Y en este sentido también es errónea la fórmula 8x7=75.

[[*Ecuación y regla de sustitución II*]]

WAISMANN pregunta a WITTGENSTEIN: La ecuación tiene en aritmética doble significado: Es configuración y regla de sustitución. ¿Qué sucedería si en aritmética o en el análisis se encontrara una demostración para la fórmula "o≠o"? Entonces se debería dar a la aritmética una orientación distinta, pues no tendríamos razón ya para interpretar la ecuación como regla de sustitución. Que "*0* no es sustituible por *0*" no indica nada. Un fautor de Hilbert podría decir: Ahí se puede ver qué es lo que da exactamente la demostración de la incontradictoriedad. Esa demostración debe mostrarnos que podemos tomar la ecuación como regla de sustitución.

WITTGENSTEIN: Esto no puede ser así. En primer lugar: ¿De dónde procede que debamos tomar la ecuación como regla de sustitución? Sólo porque la gramática de la palabra "sustituir" es la misma que la gramática de la ecuación. Por eso existe de antemano paralelismo entre las reglas de sustitución y las ecuaciones (ambas son, por ejemplo, transitivas). Suponga que yo le dijera: "a no es sustituible por a". ¿Qué haría usted?

WAISMANN: No sé cómo procedería, porque esa aserción no se conlleva con la sintaxis de la palabra "sustituible".

WITTGENSTEIN: Bien, tiene usted razón al afirmar que no sabría cómo proceder, pues en realidad tiene ante sí otro cálculo que todavía no conoce. Pero si le aclaran el cálculo, dándole las reglas de la gramática y del uso del mismo, entonces entendería la aserción "a no es sustituible por a". Mientras, no puede entender la aserción, porque todavía está en el punto de vista del cálculo anterior.

Si se lograra demostrar la fórmula "$o \neq o$", significaría solamente que se trataría de dos cálculos diferentes: uno, aquél que posee la gramática de la palabra "sustituir", y el otro en que se puede demostrar la fórmula "$o \neq o$". Estos dos cálculos podrían coexistir. (?)

A la pregunta si no es posible demostrar que la gramática de la palabra "sustituir" es la misma que la gramática de la ecuación; esto es, si se puede tomar la ecuación como regla de sustitución, se podría responder: No se puede hablar aquí de demostración. ¿Cómo, si no, tendría que expresarse la aserción que se habría de demostrar? Emplear el cálculo significa solamente formular reglas que me dicen qué debo hacer cuando en el cálculo me salga esto o aquello. ¿Es preciso que también demuestre que he formulado las reglas? Pues no parece que sea otro el sentido de la pregunta de si he empleado el cálculo.

He escrito en una ocasión: [111] El cálculo no es un concepto de las matemáticas.

WAISMANN: Las matemáticas no son conceptos de las matemáticas.

Demostración indirecta I

WAISMANN: Dijo otra vez que en el cálculo no pueden aparecer contradicciones.[112] Si, por ejemplo, tomáramos los axiomas de la geometría euclídea además de la proposición: "La suma de los ángulos de un triángulo es 181°", no habría en ello contradicción alguna, puesto que podría ser muy bien que la suma de los ángulos tuviera dos valores, como sucede con $\sqrt{1}$. Si se plantearan así las cosas, no comprendo qué sentido podría tener la demostración indirecta, pues ésta sirve para el caso en que aparezca una contradicción en el cálculo. ¿Y qué sucede con una suposición que resulta rechazada en la demostración indirecta, si la tomo como axioma? ¿No queda involucrada una contradicción en semejante sistema ampliado de axiomas? Por ejemplo, en la geometría euclídea se demuestra, por demostración indirecta, que desde un punto solamente se puede trazar *una* perpendicular a una recta. Supuesto que se dieran dos perpendiculares, constituirían un triángulo con dos ángulos rectos cuya suma sería mayor de 180°, lo que iría en

111 En el volumen VII de sus *MS* (1931) y, posteriormente, en los parágrafos 66 y 109 de *PhGr*.

112 Véase más arriba, págs. 111 ss.

contra del teorema bien conocido de la suma de los ángulos. Si estableciera como axioma la proposición: "Hay dos perpendiculares" y añadiera los demás axiomas de la geometría euclídea, ¿no tendría una contradicción?

WITTGENSTEIN: En absoluto. ¿Qué es la demostración indirecta? Una operación con signos. Pero esto no es todo. Se necesita otra regla, además, que me diga qué debo hacer cuando proceda con la demostración indirecta. (Dicha regla, por ejemplo, podría decir: cuando se opera con la demostración indirecta, deben suprimirse las suposiciones de que parte la demostración.) *Aquí no hay nada que se dé por supuesto; todo debe decirse expresamente.* Que esto se omita con tanta facilidad se debe a que uno no se puede liberar del significado que tienen en el lenguaje corriente palabras como "contradicción", etcétera.

Si estableciera el axioma: "Desde un punto se pueden trazar dos perpendiculares a una recta", se vería en este cálculo la figura simbólica de la demostración indirecta. [Vemos, por cierto, en este cálculo la figura simbólica de la demostración indirecta.] Aunque no la empleamos como tal.

¿Qué sucedería, pues, si estableciéramos semejante axioma? "Llegaría a un punto, más allá del cual no sabría proceder". Exactamente. No sabría cómo proceder, porque tendría un nuevo cálculo que todavía no conocería.

Lo que debería hacerse es lo siguiente: Habría que encontrar una disposición que nos indicara cómo operar cuando se utilizara esa demostración.

WAISMANN: Pero esto se podría llevar a cabo de todas maneras siempre que se operara con la demostración indirecta incluso en el cálculo normal. Se podría retener la proposición rechazada, mientras se procediera a alterar la reglamentación sobre el uso de la demostración indirecta, con lo que la proposición dejaría de quedar rechazada.

WITTGENSTEIN: ¡Claro que se puede proceder así! Pero con esto se aniquila el carácter de la demostración indirecta y lo que quedara de ella sería la pura figura simbólica.

VI

Miércoles, 9 de diciembre de 1931 (Neuwaldegg)[113]

Sobre el dogmatismo

En toda exposición dogmática se debe excluir lo que en cierto modo sea arrogante; pero esto no es lo malo. Más peligroso es todavía otro error, que acecha también por todo mi libro, y es la idea de que existen preguntas a las que más tarde se les podrá encontrar respuesta. No se tiene el resultado, pero ya se cree que se está en camino de hallarlo. Por ejemplo, yo he creído que era cometido del análisis lógico dar con las proposiciones elementales, y así escribí: No se pueden hacer conjeturas sobre la forma de las proposiciones elementales,[113a] y tenía razón en esto. Veía claramente que aquí no cabía hacer hipótesis y que en esas cuestiones no se podía proceder como lo hacía Carnap,* suponiendo, ya de antemano, que las proposiciones elementales constan de relaciones bidimensionales, etcétera.[114] Pero yo pensaba entonces que podría tratar más tarde las proposiciones elementales. Ha sido últimamente cuando logré salir del error. A la sazón escribí en el manuscrito de mi

113 Véase más arriba, 102, nota 62a.

113a *TLP* 5,55 ("... La proposición elemental consta de nombres, pero del mismo modo que no podemos dar el número de nombres de significado distinto, tampoco podemos señalar la composición de las proposiciones elementales.")

114 Se refiere sin duda a *Der logische Aufbau der Welt,* Berlín, 1928.

* Carnap construye el mundo a partir de las "ideas primitivas" que se entrelazan para formar "relaciones primitivas". Con las "relaciones primitivas" —que no admiten ulterior análisis, por ser primitivas— vamos formando la urdimbre de la experiencia, mediante el reconocimiento de la similitud.

De esta forma, Carnap organiza los ingredientes del complejo de la experiencia, formando "clases por la cualidad"; de éstas se pasa a las "clases por lo sensorial", si existe relación de similitud entre las clases por la cualidad. Así se llega al "campo sensorial" que ya es dimensional. El campo sensorial visual posee cinco dimensiones, mientras que el acústico solamente dos.

Carnap abandonó esta primera concepción de su *Aufbau (Construcción lógica del mundo)* cuando cayó en la cuenta de que el conocimiento científico no podía basarse en datos de la experiencia particular. Cada vez más sufrió la influencia del más radical de los componentes del Círculo de Viena, Otto Neurath. [T.]

libro (lo que no se imprimió en el *Tractatus):* [115] Las soluciones a las cuestiones filosóficas nunca deberían sorprendernos.

En filosofía no se puede descubrir nada. No lo acababa de entender y pequé contra ello.

La falsa concepción de la que quisiera tratar a este propósito es pensar que podríamos llegar a algo que hoy aún no vemos; que podríamos *encontrar* algo totalmente nuevo. Esto es un error. En verdad, poseemos ya todo, por cierto *presentemente,* y no debemos esperar nada. Nos movemos en el recinto de la gramática de nuestro lenguaje corriente y esa gramática ya existe. Por lo tanto, lo tenemos todo y no tenemos por qué esperar nada del futuro.

Con referencia a sus "Tesis",[116] escribí una vez: [117] Si en filosofía se dieran tesis, jamás habría ocasión de discutir, pues serían de tal estructura que todo el mundo debería decir: Sí, sí, esto es evidente. Mientras existan diversas opiniones respecto a una misma cuestión y se pueda disputar, es señal de que no se ha logrado expresarla de manera suficientemente clara. Si se llegara a formulaciones perfectamente claras, a la última claridad, no habría lugar a dudas y a oposiciones, pues éstas provienen de un sentimiento que nos dice: Acaban de afirmar algo y no sé si debo asentir o no. Por el contrario, si se aclarara la gramática, al tiempo que se procediera pasito a pasito, de forma que cada paso resultara evidente, no podrían originarse discusiones. La controversia surge siempre porque uno se salta algunos pasos o no los expresa claramente, con lo que se da la impresión de que sólo se ha hecho una afirmación que está sujeta a disensión. Escribí una vez: El único método legítimo de filosofar consiste en no decir nada y dejar a los otros la tarea de afirmar algo.[118] Todavía soy de la misma opinión. Lo que el otro no puede hacer es disponer las reglas paso a paso y en el debido orden, de modo que todas las cuestiones se resuelvan

115 Esta observación (u observaciones, si se incluyen las dos que siguen) no aparece en el manuscrito del *TLP* recientemente descubierto por el profesor G. H. Wright. En 6,1251 dice Wittgenstein: "Por esto *jamás* en lógica puede haber sorpresas" (Comparar también 6,1261). El "también" (una añadidura en *MS)* se puede entender más fácilmente si se toma en cuenta que Wittgenstein tenía el propósito de incluir desde antes en el *TLP* la observación aquí citada.

116 Editadas como *Apéndice B.* Cf. "Prefacio de la edición alemana", pág. 18.

117 Esta observación no sólo aparece en los volúmenes de los *MS* de Wittgenstein (a los que parece se alude aquí), sino también en el parágrafo 89 de *PhGr* y en el 128 de *PhU.*

118 *TLP* 6,53, aproximadamente.

de por sí. Lo que quiero indicar es lo siguiente: Cuando, *v. gr.*, hablamos de negaciones no hacemos sino dar la regla "~~p=p". Con lo que no afirmo nada. Lo único que digo es: La gramática de "~" está dispuesta de tal modo que "~~p" se puede sustituir por "p". Si empleas la palabra "no", equivale a decir que todo está concluido. Y de esto se trata en la gramática. No podemos hacer otra cosa sino *tabular reglas*. Si mientras interrogo capto que el otro, al emplear determinada palabra, tan pronto se refiere a una regla tan pronto a otra, debería decirle: Tienes que distinguir bien *cómo* la empleas; *y no he querido decir más.*

Sin embargo, en mi libro he procedido dogmáticamente. Semejante sistema está justificado sólo cuando se trata de determinar en cierto sentido los trazos fisionómicos de lo que se puede reconocer todavía, y ésta es mi disculpa. Veía en lontananza algo, aunque de forma muy difusa, y quise distinguir aquello lo más posible. Pero cualquier recuelo de tales tesis ya no tiene justificación.

WAISMANN: También antes pensé de otro modo. Mi falta fue que juzgaba que la tarea del análisis lógico del lenguaje era describir, de una forma u otra, los trazos más generales de la realidad; es decir, aquellos que son comunes al lenguaje y al mundo y que son primordialmente los que permiten la expresión del pensamiento. Cuando, por ejemplo, digo: Todo hecho atómico es complejo, suena como a una descripción general de la naturaleza. Pero ahora veo que sería preferible no expresar proposiciones de ese tipo, sino circunscribirse al recinto de la gramática. Otro ejemplo de lo mismo es quizá la afirmación de que un color jamás aparece solo, sino siempre en un sistema. Dicho así, parece otra vez como si se expresara algo sobre la realidad antes de toda experiencia, cuando en verdad solamente se trata de nuestros símbolos. (?) La misma dificultad encuentra quien habla de la conexión existente entre el lenguaje y el mundo y no ve claro que la proposición es una figura lógica del hecho. Entonces uno está tentado de decir: La lógica atraviesa el mundo, y esto es metafísica.

WITTGENSTEIN: Se puede aclarar aquí muy fácilmente. Cuando escribí: "La proposición es una figura lógica del hecho",[119] quería decir: Puedo insertar en una proposición una figura, e incluso una figura dibujada, y luego proseguir en la proposi-

[119] En ninguna parte aparece así textualmente, pero compárese: *TLP* 3, 4,01, 4,03.

ción. Por consiguiente, puedo emplear tanto una figura como una proposición. ¿Cómo es posible? La respuesta es: Porque una y otra coinciden en cierto modo, y a esto común es a lo que llamo *figura*. Por lo mismo, la expresión "figura" se toma aquí en sentido lato. He heredado este concepto de la figura de dos lugares: primero de la figura dibujada, y luego de la figura de los matemáticos, en quienes es ya un concepto general, pues el matemático habla de figuraciones, donde el pintor no podría utilizar esa expresión.

La palaba "figura" tiene una cosa buena: Me ha ayudado a mí y también a otros a aclarar algo, pues hace referencia a algo común y lo muestra: ¡A esto se refería! ¡Ya me parecía!: ¡Exacto!, ahora entiendo: Proposición y figura son, por tanto, del mismo tipo.

También podría emplear una escala como símbolo; es decir insertar una escala en una descripción y emplearla como proposición. Pues, de hecho, se puede decir: Una proposición se comporta en muchos sentidos como una escala, y hasta podría llamar escala a la proposición. (Por ejemplo: al hablar de colores aplicamos todo el patrón cromático a la realidad.[120])

Cuando por primera vez acudió a mi mente lo que existe de común entre la proposición y la figura, me orienté en otras direcciones y comparé la proposición ora con una imagen viva,[121] ora con un modelo,[122] ora decía: La proposición representa,[123] muestra,[124] cómo están las cosas, etcétera.

Podría indicar por un ejemplo la diferencia existente entre un procedimiento dogmático y otro no dogmático. Primero hablaré dogmáticamente y luego lo haré adogmáticamente. Así: Si una proposición se comprueba de dos modos distintos es que en uno y otro caso tiene sentido distinto. Esto suena raro y puede dar ocasión a controversia, pues alguien podría obje-

120 Se compara una figura con un patrón en *TLP* 2,1512 y una proposición en *Nb* 1914-16, pág. 32. Pero estos lugares anteriores no muestran rastros de la idea de un sistema de proposiciones como en las págs. 76 *ss.*, más adelante.

121 *TLP* 4,0311. ("Si un nombre está por una cosa y otro por otra y están unidos entre sí, entonces el todo —como figura viva— representa el hecho atómico.")

122 *TLP* 4,01, 4,04, 4,463.

123 "Representar" ocurre en el sentido a que se hace alusión aquí, pero nunca tiene como complemento directo "cómo están las cosas". Compárese, por ejemplo, *TLP* 2,0231, 4,021, 4,031, 4,1.

124 *TLP* 4,022. "La proposición *muestra* cómo están las cosas, si es verdadera; y dice que así están."

tar: No veo por qué esa misma proposición ha de tener un significado distinto y no haya posibilidad de comprobarla de dos maneras distintas. A continuación me expresaré adogmáticamente, con lo que solamente llamaré la atención sobre algo: La comprobación de una proposición sólo se da por medio de una descripción. El hecho por consiguiente es éste: Tenemos dos proposiciones, y la segunda describe la comprobación de la primera. ¿Qué haré? Estableceré sencillamente como regla de gramática que la primera proposición debe seguirse de la segunda. No hablo, pues, de sentido ni de cuál sea el sentido, sino que me quedo todo el rato dentro de la gramática. Si alguien dijera que una proposición tiene dos comprobaciones distintas, le haría notar: Esas verificaciones se describen por distintas proposiciones; por tanto, cuando manipulamos la misma proposición *pasamos a distintas reglas; y no diría más.*

Así, pues, le señalaría al otro qué es lo que propiamente está haciendo y me guardaría de cualquier otra afirmación. Todo, por ende, debe jugarse dentro de la gramática.

Se trata, consiguientemente, de hacer distinciones esenciales y fundamentales.

Sobre lo infinito

Waismann: Ejemplo de confusión del punto de vista lógico con el empírico es la opinión frecuentemente emitida por Hahn de que se debe a la contingencia de la constitución psicológica de la conciencia que nuestro pensar sea finito.[125] Hahn piensa: De por sí, podría darse una conciencia que pudiera pensar muchos pensamientos, sin fin. Trato de imaginarme una conciencia que emplee medio minuto en el primer pensamiento, un cuarto de minuto en el segundo, y así sucesivamente. Al cabo de un minuto, ese ser habría pensado infinitamente muchos pensamientos. Que esto no sea así, lo vemos por la experiencia. Todo lo que se puede decir al respecto es que no podríamos describir tal conciencia.

Wittgenstein: Sí sería posible. Hay que fijarse en lo que quiere decir Hahn para imaginarse todo con la debida clari-

125 Probablemente en discusiones orales. En parecidas reflexiones se basa, en parte, la demostración de Brouwer acerca de la posibilidad de (una) división de un mapa en tres regiones, de modo que en cada punto limítrofe colinden las tres regiones a la vez. Esta demostración fue explanada por Hahn en *Krise und Neuaufbau in den exakten Wissenschaften (Crisis y reconstrucción en las ciencias exactas)* —varios autores—, Viena, 1933, páginas 54-56.

dad. Preguntaría yo: ¿Cómo determinaríamos que ese ser posee tal conciencia? ¿En qué nos basaríamos? Así podríamos deducir qué significa la aserción de Hahn. Tomemos otro ejemplo. (Nada significa que cambiemos de ejemplo, pues la diferencia que establezca la gramática se extiende también a cualquier ejemplo que pongamos.) ¿Qué querría decir que un cordón fuera infinitamente largo? ¿Equivaldría a decir: No puedo llegar hasta el fin? No puede ser esto. Aclaremos la cosa de una vez con el siguiente ejemplo.

Supongamos que alguien afirmara: Me puedo imaginar perfectamente un poste del telégrafo que sea infinitamente alto. A lo que yo le preguntaría: ¿Cómo lograrías comprobar, en primer lugar, que tiene diez metros de alto? "Lo mediría." ¿Cómo sabrías que tiene cien metros? "Igual que antes." Ya veo qué criterio sigues mientras se trate de *n* metros. ¿Pero cuál es el criterio para medir lo infinito? ¿También la medición? "Ya no". Luego, ¡ya no vale un criterio de tipo finito!, y ahora queda una cosa clara: La palabra "infinito" tiene otra gramática que un vocablo numeral. ¿Cómo comprobar, a su vez, esta aserción? Varios son los modos. Uno de ellos consistiría, por ejemplo, en encontrar una ley que me permitiera describir los objetos con tanta mayor exactitud cuanto mayor fuera la longitud del poste del telégrafo. Entonces podría decir: Propongo la hipótesis de que el poste del telégrafo es infinitamente alto, pues he podido conjuntar suficientes datos merced a la ley.

Por lo demás, la palabra "infinito" puede poseer *diferentes* significados. Es lo mismo que con la cuestión de si solamente existe *una* clase de números reales. Diría: Existen diferentes clases de números reales, porque también existen diferentes reglas gramaticales. Los números de Brouwer,[126] por ejemplo, son de un tipo distinto, porque la gramática de ">", "=", "<" es distinta para ellos. Cabría preguntar: ¿Son todavía números los números complejos? Podría aceptarlo; para lo cual procedería así: Haría muy fuerte hincapié en lo que tienen de común las gramáticas de los números naturales, racionales, reales y complejos. (Podría extender lo común hasta, *v. gr.*, llamar *número* a una *proposición,* pues con ella se puede calcular y obtener sumas y productos.) Pero corro peligro de pasar por alto las diferencias. Y éste es precisamente el peligro de las matemáticas de hoy, que buscan nivelar las diferencias y equi-

[126] Véase nota 22, de la pág. 65.

pararlo todo; por lo contrario, yo intento poner el acento en la *diferencia* existente entre las reglas gramaticales.

Sobre la definición que da Ramsey de la identidad [127]

Ramsey declara así la identidad:

"x=x", es una tautología,
"x=y", una contradicción (lógica).

O sea: El símbolo "... = ..." es una tautología cuando a un lado y otro del signo está la *misma* letra, y una contradicción

---

Wittgenstein a Ramsey: *Extracto de una carta de junio de 1927.** Usted define "x=y" por

$$(\varphi_e) \cdot \varphi_e x \equiv \varphi_e y.$$
$$Q(x,y)$$

La razón de esta definición debería ser que "Q (x,y)" fuera una tautología siempre que "x" y "y" tuvieran el mismo significado, y una contradicción cuando lo tuvieran distinto.

Probaré de mostrarle que esa definición no sirve, ni servirá ninguna otra que convierta "x=y" en una tautología o en una contradicción.

Es evidente que "Q (x,y)" es un producto lógico. Supongamos que "a" y "b" son dos nombres con significados diferentes. Entonces, entre los miembros de nuestro producto habrá uno en que "f (a)" signifique "p" y "f (b)" signifique "~p". Llamaré a esta función, función crítica "f_k". Ahora, aunque sabemos que "a" y "b" tienen significados diferentes, sin embargo decir que no los tienen no puede ser sinsentido. Pues si así fuera, la

[127] Al parecer, se trata de una crítica a una conferencia habida en 1925, reimpresa en *Foundations of Mathematics*, Londres, 1931, pág. 53. Los extractos de cartas que aparecen *bajo la línea* muestran un estadio más temprano de la discusión. Parece que los puntos de vista de Wittgenstein fueron enviados a Ramsey por Schlick y Waismann (de aquí que estuviera la copia entre los papeles de Waismann) y quizás fueran también traducidos por ellos. Ramsey contestó a Schlick, quien (en carta arriba impresa y que obra en poder del profesor H. Hänsel) pasó esa contestación a Wittgenstein. Posteriormente, en octubre de 1927, Schlick visitó Cambridge y sin duda se encontró con Ramsey.

* En inglés en el original. [T.]

(lógica) cuando la letra es diferente. Pero no se ha de emplear el signo de igualdad en este sentido, pues se necesita también para expresar la sustituibilidad de dos signos distintos, ya que la sustituibilidad de "x=x" no es preciso expresarla. (Sobre lo mismo: El único uso que se podría hacer de este simbolismo estaría en el que permite emplear las expresiones "x=x" y "x=y", en vez de las palabras "tautología" y "contradicción" (lógica).) Pero si el signo de igualdad ha de poder significar la sustituibilidad de dos signos *distintos,* entonces "x=y" no ha de ser una

---

proposición negativa, a saber, que tienen el mismo significado, sería también sinsentido, *pues la negación de lo que carece de sentido carece de sentido.* Supongamos ahora, erróneamente, que a=b; entonces, al sustituir "a" por "b" en nuestro producto lógico, la función crítica "$f_k(a)$" se convierte en sinsentido (ambigua) y, consiguientemente, también todo el producto. Por otro lado, supongamos que "c" y "d" son dos nombres con el mismo significado, entonces no hay duda de que "Q(c,d)" será una tautología. Pero ahora supongamos (equivocadamente) que $c \neq d$. "Q(c, d)" continúa siendo una tautología, pues no hay ninguna función crítica en nuestro producto. E incluso si se pudiera dar por hecho (que no se puede) que $c \neq d$, no se podría suponer que existiera una función crítica f_k (tal que "$f_k(c)$" significara "p" y "$f_k(d)$" significara "$\sim p$"), pues ese signo carecería de significado. Por tanto, si "x=y" fuera una tautología o una contradicción y estuviera bien definido por "Q(x,y)", "Q(a,b)" no sería contradictorio sino sinsentido (pues esta suposición, si fuera una suposición que "a" y "b" tuvieran el mismo significado, convertiría en sinsentido la función crítica). Y, por tanto, "$\sim$Q(a,b)" también carecería de sentido, pues la negación de lo que carece de sentido carece de sentido.

En el caso de c y d, "Q(c,d)" queda en tautológico, incluso si c y d se suponen diferentes (pues en este caso no se puede suponer que exista una función crítica).

El modo de salir de todos estos inconvenientes es ver que ni "Q(x,y)", por función interesante que sea, ni cualquier otra función proposicional, puede sustituirse por "x=y".

El error que usted comete se ve aún más claramente en sus consecuencias; a saber, cuando trata de decir: "Hay un individuo". Se podrá dar cuenta de que en el caso de que no hubiera ningún individuo,

$$(\exists x) . x = x,$$

contradicción (lógica). Si quiero expresar la contradicción (lógica) he de añadir otra regla, por ejemplo, "x Def y" (lo que significa que "x" es sustituible por "y") y escribir:

$$x=y.\sim xDefy$$

Sólo ahora tenemos una contradicción, pues "x=y" permite lo que prohibe "∼xDefy", siendo que "x Def y" indica igualdad. Esto muestra que la contradicción se ha de representar como contradicción entre dos reglas.

"E" carecería "totalmente de sentido". Pero si "E" equivale a decir: "Hay un individuo", "∼E" indica que "No hay ningún individuo". Por tanto, de "∼E" se sigue que "E" carece de sentido. Luego "∼E" debe ser absurdo en sí mismo; consiguientemente, tiene que ser "E".

La cosa queda como antes. "E", según su definición del signo "=", puede ser muy bien una tautología, pero no dice "Hay un individuo". Quizás responderá usted: por supuesto que no dice "Hay un individuo", pero *muestra* qué es lo que realmente indicamos al decir: "Hay un individuo". Mas esto no se ve por "E", sino por el simple uso legítimo del símbolo "(∃x) . . .", y por tanto tan bien (y tan mal) por la expresión "∼(∃x).x=x". Lo propio cabe decir de sus expresiones "Hay al menos dos individuos", y así sucesivamente.

SCHLICK a WITTGENSTEIN: *Extracto de una carta del 15 de agosto de 1927.*

Hace algún tiempo recibimos aquí [[Millstatt, Kärnten]] la respuesta de Ramsey a su carta. Copio los lugares que le pueden interesar. Primero, Ramsey reproduce en una frase el pensamiento de su objeción y prosigue.* "Estoy de acuerdo enteramente con esto; sin embargo, me parece que Q(x,y) [abreviatura de $(\varphi_e) \cdot \varphi_c x \equiv \varphi_e y$] es substituto adecuado de x=y como elemento de la notación lógica. Siempre empleamos x=y como parte de una función proposicional generalizada, y en tal caso lograremos obtener el sentido correcto de la proposición general resultante, si en su vez escribimos Q(x,y).

. . . . . .

En realidad, jamás fue mi intención decir que Q(x,y) fuera un modo de decir que *x* y *y* eran idénticas. Pensé que Wittgens-

* En inglés en el original. [T.]

WAISMANN formula el problema de la incontradictoriedad: El problema de la incontradictoriedad significa lo siguiente: ¿Cómo sabré yo que una proposición que he demostrado mediante métodos transfinitos, no puede ser contradicha por cálculo numérico finito? Si, *v. gr.*, algún matemático encontrara una demostración de la proposición de Fermat, que esencialmente emplea métodos transfinitos —fuera por el axioma de la selección o del tercero excluido, en la forma: o la proposición de Fermat vale para todos los números o hay algún número para el que no vale—, ¿cómo sabría que esa proposición no podría ser contradicha por algún contraejemplo? Esto no es evidente de por sí. Sin embargo, cabe señalar que los matemáticos tienen tal confianza en las inferencias transfinitas que, luego del conocimiento de esa demostración, nadie intentaría buscar un

---

tein había demostrado que era imposible decir semejante cosa. Lo que hice fue proponer Q(x,y) como substituto del símbolo x=y, como se emplea en proposiciones generales y al definir las clases.

Me hizo también algunas críticas sobre mis observaciones respecto del número de cosas que hay en el mundo, que creo se pueden responder del mismo modo, pero de todas formas son menos importantes.*

* Podrá ayudar a la comprensión de esta sección lo que dice Russell: "Shortly after the second edition of the *Principia* was published, the problem of the axiom of reducibility was taken up by F. P. Ramsey in two very important papers: *The Foundations of Mathematics,* published in 1925, and *Mathematical Logic,* published in 1926. ...His main thesis was that mathematics must be rendered purely extensional and that the troubles of the *Principia* arose from a illegitimate intrusion of an intensional point of view. Whitehead and I had held that a class can only be defined by means of a propositional function and that this applies even to classes that seem to be defined by enumeration. For example, the class consisting of the three individuals *a, b,* and *c* is defined by the propositional function "$x = a$ or $x = b$ or $x = c$". Wittgenstein's rejection of identity (which Ramsey accepted) made this method impossible, but, on the other hand, Ramsey considered that there is no *logical* objection to the definition of an infinite class by enumeration. *We* cannot define an infinite class in this way because we are mortal, but our mortality is an empirical fact which logicians should ignore... He thought that so far as logic is concerned an infinite number of arbitrary choices is just as allowable as a finite number." (B. Russell: *My Philosophical Development.* Capítulo X. George Allen & Unwin LTD, Londres 1959.) [T.]

contraejemplo. Pregunto ahora: ¿Está justificada esa confianza? Esto es: ¿Estamos seguros de que jamás una proposición que ha sido demostrada mediante métodos transfinitos puede ser contradicha por algún cálculo numérico concreto? Esta es la cuestión matemática de la incontradictoriedad.

Voy a exponer cómo me parece que está este asunto, refiriéndome a la cuestión análoga en el álgebra común: ¿Cómo puedo yo saber, una vez demostrada una proposición de cálculo literal, que no puede ser contradicha mediante un ejemplo numérico? Supuesto que hubiera demostrado que

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n\,(n+1)}{2},$$

¿cómo sé que esta formulación resiste el control con números? Tenemos la misma situación de antes. Creo que podemos decir lo siguiente: El motivo por el que un cálculo literal y otro numérico conducen al mismo resultado, o lo que es lo mismo: el motivo por el que podemos emplear letras con los números concretos, está en que los axiomas del cálculo literal —leyes conmutativa y asociativa de la adición, etcétera—, han sido escogidos de antemano de tal forma que permiten tal empleo. Esto está en conexión con la elección de determinada prescripción: Un axioma corresponde a una inducción, y esa correspondencia es posible merced a que las fórmulas poseen la misma multiplicidad que la inducción, de modo que nos es factible proyectar el sistema de la inducción sobre el de las fórmulas. En esto no hay problema y no se puede proponer la cuestión de si alguna vez pueden entrar en conflicto el cálculo literal y el numérico. ¿Qué decir, empero, del análisis? Aquí sí parece existir un problema.

WITTGENSTEIN: Antes que nada: ¿De qué estamos hablando propiamente? Si por confianza se entiende asentimiento, no me interesa. No estamos tratando de la psicología de los matemáticos. Por confianza se ha de entender otra cosa y tiene que ser exclusivamente algo que se pueda transcribir por símbolos. Lo que parece que se pregunta aquí es cuál es la base de la coincidencia de dos cálculos. Tomemos un ejemplo:

$$\begin{aligned} 2 + (3+4) &= 2 + 7 = 9 \\ (2+3) + 4 &= 5 + 4 = 9. \end{aligned}$$

Tengo aquí dos cuentas independientes que me han dado el

mismo resultado. Independiente quiere decir aquí que una cuenta no copia de la otra. Son dos procesos distintos.

Y ¿qué [qué sucedería entonces], si no coincidieran? No podría hacer nada; sería que los símbolos poseerían otra gramática. Las leyes asociativa y conmutativa de la adición valen en base a la gramática. Pero en la teoría de los grupos, AB no es igual a BA; no podríamos realizar una multiplicación de dos modos, aunque tuviéramos un cálculo.

La cuestión es la siguiente: Debo antes prefijar cuándo he de considerar correcta una operación. Es decir, debo establecer bajo qué condiciones diré que se ha demostrado una fórmula. Si sucediera que una fórmula quedara demostrada por un método y por otro contradicha, no significaría en modo alguno que tuviéramos una contradicción y que estuviéramos perdidos sin remedio, sino que podríamos decir: La fórmula significa otra cosa distinta; pertenece a dos cálculos distintos, y en uno queda demostrada y en el otro repudiada. En realidad, tenemos dos fórmulas que por casualidad poseen en común los signos.

En la cuestión de la incontradictoriedad se comenten una serie de equivocaciones.

En primer lugar, se debería inquirir: ¿Dónde ha de aparecer la contradicción: en las reglas o en las configuraciones del juego?

¿Qué es una regla? Cuando, por ejemplo, digo: ¡Haz esto!, y: ¡No hagas esto!, el otro no sabe qué ha de hacer. Es decir, que no damos valor de regla a una contradicción ni la llamamos regla. O, más sencillamente, la gramática de la palabra "regla" es de tal género que nunca se señala como regla una contradicción.

Si entre las reglas que empleara surgiera una contradicción, podría decir: Luego, no son reglas en el sentido como yo entiendo las reglas. ¿Qué hacer en este caso? Nada más sencillo: Dar nueva regla, con lo que la cuestión quedará liquidada.

Podría ser ejemplo de esto el juego de damas.[128] Supongamos que existe una regla que dice: Las fichas negras deben atacar a las blancas. Si una ficha blanca estuviera al margen del tablero no se podría aplicar la regla. Para este caso implantaríamos nueva reglamentación y la dificultad desaparecería.

Pero aquí tenemos que ser más precisos. Es el caso aquí de una contradicción (se entiende entre las reglas: "Las blancas

[128] Compárese más arriba, pág. 110.

han de atacar a las negras" y "no se puede jugar al margen del tablero"). Pregunto ahora: ¿Hemos dispuesto desde el principio de algún método para hallar la contradicción? Hay dos posibilidades:

1. En el caso del juego de damas, sin duda teníamos la posibilidad. La regla dice: "Siempre..." Con lo que se indica: "En esta y aquella situación y en la de más allá...", se ve, pues, que desde el principio me ha sido posible hallar la contradicción y si no la he visto ha sido culpa mía: Habré sido demasiado perezoso y quizá no he considerado todos los casos o he olvidado una situación particular. Aquí no hay problema alguno que sea serio. Si existe una contradicción, propondré otra reglamentación más y así quedará marginada. Siempre se puede desterrar la contradicción.

Podré decidir si se trata de una contradicción o no, con solo pasar revista al conjunto de reglas. En el caso de la geometría euclídea, por ejemplo, es cuestión de cinco minutos. Las reglas de la geometría euclídea no se contradicen recíprocamente; es decir, no se da el caso de que haya una regla que invalide la anterior ("p" y "~p"), y con esto me ha de bastar.

2. Pasemos ahora al segundo caso, cuando no disponemos de método alguno. El conjunto de reglas está por lo pronto en orden y no aparece contradicción alguna. Pregunto ahora: ¿Existe peligro, a pesar de todo? En absoluto. ¿A qué tememos? [1] ¿Acaso a una contradicción? ¡Pero si solamente se me puede patentizar mediante un método para su hallazgo! Mientras no disponga de ese método, no me tiene que importar; puedo estar tranquilo y seguir contando. Si en matemáticas apareciera una contradicción ¿se derrumbaría en un momento todo lo que los matemáticos han calculado durante cientos de años? [2] ¿Tendríamos que decir que en realidad no habían sido auténticos cálculos? De ninguna manera. Si apareciera una contradicción, nos las sabríamos componer de algún modo llegado el caso, pero por ahora no tenemos que preocuparnos.

Lo que en realidad sucede es esto: A uno se le presenta delan-

---

1] No nos tenemos que inquietar; no hay motivo para que nos inquietemos.

2] Lo que nos incomoda es el pensamiento: ¿No podrá salir alguna vez una contradicción? Pregunto yo: ¿Qué quiere decir aquí *alguna vez*? Y *si* al cabo de medio año apareciera una contradicción, ¿quedaría injustificado todo lo que hasta ahora he calculado?

te determinado modelo y quiere *igualar el cálculo al modelo.* (Comparar con lo que viene luego.) [129]

Añadidura al dictado [130]

INCONTRADICTORIEDAD VIII

Quisiera revolverme aquí contra el *coco* de la contradicción, el temor supersticioso a que la aparición de una contradicción significara el fin del cálculo.[1] Preguntaría: ¿A qué viene esa pusilanimidad? ¿No tendrían su propio atractivo los cálculos con contradicciones? [131] Probablemente se me dirá: No; esos cálculos serían baladíes,[2] pues de una contradicción se puede infe-

1] Imagínese que se me comunicara que mi hermano Paul había sido hallado muerto en el bosque. ¿Qué haría? ¿Debería dar parte a la policía? Pues aquí también se pregunta: ¿Qué hacer? [132]

2] No permitiremos que en el conjunto de reglas aparezca "p.~p"; es decir, que "p.~p" no lo consideramos como *regla.* (La gramática de la expresión regla no admite como tal regla "p.~p".)

Podríamos simplificarlo todo, por ejemplo, diciendo que el juego se reduce a "c→p".

Alguien diría: jamás de una regla ha de poder seguirse una contradicción. De nuevo no entendemos esto. Tomemos los axiomas euclídeos. Esos axiomas son reglas, es decir, proposiciones de gramática. Las reglas del juego de la geometría vienen

129 Quizás se refiere a la pág. 177, más adelante.

130 Schlick en diciembre de 1931 se encontraba en América. No obstante, Waismann se vio con Wittgenstein y pudo tomar notas para Schlick. Verosímilmente, la "Añadidura al dictado" de su cuaderno de apuntes pertenece a todas esas notas o a parte de ellas. Entre los papeles de Waismann se halla un "Dictado para Schlick" (sin duda, un trabajo de Wittgenstein de esta época más o menos), que versa sobre el entendimiento de una proposición. Con todo, no se corresponde con esta "Añadidura" ni se parece a nada de las obras póstumas (Nachlass) de Wittgenstein. Se entregó a los albaceas para que procedieran con él. Véase el "Prefacio de la edición alemana", págs. 20 *s.*

131 Véase más arriba, pág. 123.

132 Esta observación aparece en la página izquierda, frente al encabezado "Añadidura al dictado". Es de un significado general, tanto para lo que precede como para lo subsiguiente. El único hermano que entonces tenía vivo Wittgenstein se llamaba Paul.

rir cualquier fórmula, que se podría aceptar arbitrariamente, con lo que el cálculo perdería su interés. A lo que respondería: Entonces el cálculo consta de dos partes: la que llegará hasta que se dé con una contradicción y la que nos permitiría aceptar cualquier fórmula. La más interesante es la primera. La gente se pregunta: ¿Se acabará el cálculo? *¿Cuándo?* ¡Preguntas muy emocionantes!

¡Volvamos otra vez a la geometría euclídea! En ella los axiomas son reglas, es decir, proposiciones de gramática. (Cuando digo, por ejemplo: "Alrededor de cualquier punto se puede trazar una circunferencia de cualquier radio", equivale a decir: Si hago una aserción en la que se habla de una circunferencia al rededor de un punto, la aserción tendrá sentido sea cierta o falsa. Esto muestra que ese axioma era una regla de gramática.) Las reglas que llevan a deducir nuevas proposiciones de los axiomas son reglas de lógica. Y ahora pregunto: *¿Dónde* habría que esperar la contradicción?

Supongamos que una medición empírica de la suma de los ángulos de un triángulo hubiera dado 182°. Otro se presenta y demuestra que la suma total es de 180°. Se podría argüir: Sabía aproximadamente cuál era la cantidad; él mismo nos muestra que era así en efecto. Pero, ¿qué tal si la medición se hubiera desviado mucho del valor de 180°? Todo se reduciría a cómo se *tomara* el asunto. Podría tomar los dos resultados como suma de los ángulos, pero habría que ponerse de acuerdo respecto a lo siguiente: Que la medición y la demostración no tienen por qué contradecirse. La medición es la que es, y con la demostración no queda ni suprimida ni contradicha. Cuando en geometría se admite la medición como método válido, estamos ante otra forma. Que resulten, por tanto, distintos valores en la suma de los ángulos no deben sorprendernos, pues hemos seguido distinta reglamentación para fijar la amplitud de un ángulo; es decir, que la expresión "ángulo" y "suma de ángulos" es equívoca, por cuanto le convienen distintas reglas gramaticales.

El asunto está como en el caso en que se dijera: Al través de tres puntos cualquiera pasa una recta. Por "recta" entendería aquí algo distinto de lo que se entiende por esa palabra en geometría. Ahora bien, como la palabra "recta" tiene ya una

---

a ser las reglas de la lógica. ¿Adónde habría que esperar la contradicción?

"Déle a esta vara 5 m". "Déle a esta vara 3 + 3 m". ¿Sería lo mismo?

gramática fijada, veo una contradicción no bien mi gramática de la palabra "recta" se aparta de la normal. (En el mismo sentido, empleo el signo de igualdad como sinónimo de "sustituible por", y hablaría de contradicción en cuanto las reglas concernientes al signo de igualdad se apartaran de la gramática de la expresión "sustituible por".)

¡Regresemos otra vez a la suma de los ángulos del triángulo! Supuesto que una vez hubiéramos demostrado que la suma de los ángulos era de 180°, y otra vez que era de 182° (y ambas veces por axiomas), ¿qué sucedería? Diría: Ya hemos establecido dos ordenamientos distintos para poder considerar una medición como libre de defecto. Dije una vez: Los axiomas de la geometría son el patrón por el que juzgamos la validez de una medición.[133] La regla $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ es un patrón de ese tipo. Si doy otra regla semejante, introduzco dos patrones, aunque sean patrones en *distinto sentido*. Imaginemos que utilizamos primero una escala con divisiones fijas, y luego otra que solamente tuviera fijas las divisiones 1, 2,...9, pero que la división 10 fuera movible. Se trataría de una escala de sentido totalmente distinto. Naturalmente, no sé si jamás alguien se servirá de una escala así, pero ¿quién me impide llamarla regla? Las dos proposiciones: La suma de los ángulos del triángulo es 180°, y: La suma de los ángulos del triángulo es 182°, serían acaso dos escalas diferentes, y todo dependería del uso. Me puedo imaginar cómo se podrían emplear esas reglas: [1] Una de las reglas la emplearía, por ejemplo, cuando se tratara de medir los ángulos con un método *mecánico* (transportador), y la otra al servirme de algún método *óptico*.

¿Dónde tenemos que ser rigurosos? Creo que en las reglas lógica.[2] Con ellas se *puede* ser riguroso. En este sentido es

---

1] No podemos emplear una contradicción como regla. No puedo *llamar* regla a una contradicción, por la misma gramática de la palabra "regla".

2] Lo que se entiende por conjunto de reglas es a la gramática de la expresión "conjunto de reglas" lo que el signo de igualdad es a la expresión "sustituible por". Si se quiere buscar el fundamento de por qué se exige una gramática al signo de igualdad, por qué se le confiere el carácter de transitivo, se puede apuntar que porque la palabra "sustituible" tiene la misma gramática. Pero no se puede dar la razón de esa gramática. Dígase lo mismo de la gramática de la expresión "con-

133 Véase más arriba, pág. 55 *s.*

harto fácil mostrar que la geometría euclídea no contiene contradicciones. Alguien dirá: No contiene contradicción patente. A lo que responderé: ¡Mejor para la lógica! pues todo dependerá ya de las reglas patentes, que iré alterando de modo que nunca me salga una contradicción.

Si encontrara una contradicción, a pesar de todo, sería únicamente por las reglas que antes habré dado y que podré eliminar a continuación. Parecerá como si esto amenazara ser un desbarajuste, pero no se trata más que de la contradicción patente; contra la contradicción solapada la lógica nada *tiene* que hacer. No nos dice: Nunca debe aparecer una contradicción, sino: No has de permitir que aparezca; es decir: has de manejar las reglas que des de tal manera que nunca se produzca la contradicción. Mientras, todo estará en orden, perfectamente en orden, y no existe peligro a la vista.

Con otras palabras: Si se le presentaran a alguien los axiomas de la geometría euclídea y preguntara: "¿Es un conjunto de reglas?" se le debería responder afirmativamente. Si, luego, preguntara: "¿Contienen alguna contradicción?" Se le habría de responder: "No". "¿Pero puede aparecer alguna?" "No lo sé; esto dependerá de lo que hagas. ¿Puedes decir desde ahora cómo? Si no, es señal de que no están bien claras las cosas; en tal caso, te las debes componer para que no aparezca."

En lógica hay que ser rigurosos respecto de la contradicción, si deseamos tener un conjunto de reglas que sean tales. Por lo demás, en lógica solamente existe contradicción entre "p" y

---

junto de reglas". La razón por la que no pueden aparecer contradicciones es sencillamente porque sólo llamamos regla a lo que no contiene contradicción. No hay otro fundamento.

La demanda de incontradictoriedad se ha de colocar solamente en lo que se refiere a la contradicción *abierta*. La contradición solapada no contraviene la gramática del "conjunto de reglas". Pues si permanece oculta es merced a que no han sido sometidos a gobierno el modo y manera del empleo del conjunto de reglas. He de regular ese modo y manera, de forma que no se siga ninguna contradicción. Ahora bien, se ha de evitar igualmente el modo y manera de una contradicción no bien aparezca. Antes de que aparezca y antes de que disponga de algún método para dar con ello, no sólo no se ha de evitar, sino que ni siquiera existe lo que tengo que evitar, por lo que tampoco puedo tomar medidas para evitarlo. No hay, pues, motivo de inquietud.

"~p". De aquí se sigue que es decisivo para el cálculo, al que lleva de la mano la lógica, que algo esté lógicamente permitido o vedado. Todas las demás interpretaciones y aplicaciones no le importan a la lógica.

Supongamos que tengo la proposición "q" y que establezco la regla: "q.~p ≡ q"; (es decir: de "q" se sigue "~p"). Puedo establecer esta regla o dejar de hacerlo. Supongamos que antes hubiera tenido "p"; la lógica me dirá: ¡No debes establecer esta regla! ("q" = "La suma de los ángulos es 180°" [[y]] "p" = "La suma de los ángulos es 181°", pueden estar todavía uno junto a otro. Sólo cuando se establezca la regla: "q.~p ≡ q", y *sólo entonces* aparece la contradicción; ¡antes no!). La contradicción surgirá una vez se establezca la regla de que "p" y "~p" pueden aparecer, cosa que de ningún modo debo permitir.

Lo que lleva a error es la creencia de que todo debe ocurrir a la fuerza y que, queramos o no, nos deslizamos hacia el abismo. ¿Pero es que no somos llevados a la fuerza? En cierto sentido sí lo somos. Pero, ¿en virtud de qué? De una analogía: No precisamente por el cálculo, sino por una serie de condiciones inexpresadas que queremos equiparar al cálculo. Por ejemplo, deja de ser geometría (que la suma de los ángulos haya de poseer solamente un valor). O sea, es otro carácter lo que me lleva hasta ahí. Siempre puedo evitar la contradicción como tal.

Otro es el asunto cuando llamo contradicción a determinada fórmula en el cálculo. Desde luego lo puedo hacer; pero cuando digo: Esta fórmula no debe aparecer, he dado otra regla más y he alterado el juego. La cuestión de si debe aparecer esa fórmula es problema exclusivamente matemático, y nada tiene que ver con lo lógicamente permitido o vedado.

Símil: "La extensión" de π

Supongamos que tuviera que contar con números decimales, pero de modo que nunca salieran cuatro sietes seguidos. Sería algo disparatado por lo pronto, pues ni siquiera sé qué número debo utilizar. Pero puedo establecer una regla que dijera: En cuanto salgan cuatro sietes seguidos, deberé dejar ese número. ¿Y si de hecho salieran? No se trataría solamente de la figura del cálculo, pues conjuntamente entra el factor tiempo. La primera condición, pues, era sólo una condición aparente que no asevera nada. No puedo decir: Contaré solamente con números, si... —a menos que disponga de un criterio para saber si esa condición se cumple. Si no es así, es imposible.

Lo que anda confundido aquí es la *ley* de π y la *extensión* de π. Solamente existen extensiones finitas de π pero no *la* extensión de π. Me es dado decir: Escribiré solamente aquellas extensiones de π que no contengan cuatro sietes seguidos; pero no: solamente emplearé aquellos números en cuya *ley* no salgan cuatro sietes; ésta es la confusión que se comete aquí.

Al mismo símil correspondería el caso siguiente: El juego llegará a una clase de terminación si aparece determinada pieza, a la que llamaremos contradicción. Esto lo hemos determinado ya desde el principio; luego, no podemos hablar de contradicción en el sentido de que haga imposible el juego.

[[*El concepto del cálculo*]]

Considere el asunto como lo considere, por todas partes aparece que se puede determinar qué es un cálculo. Un cálculo vale tanto como otro. A un cálculo se le puede describir, mas no exigir.

La palabra "cálculo" tiene diferente significado: Existen diversos cálculos, lo mismo que existen diversos conjuntos de reglas. Con esto no quiero decir diversas operaciones (Rechnungen), sino diversos *tipos* de cálculo (Kalkül*arten*). El concepto mismo de cálculo es plurisignificativo.

Lo que se confunde siempre aquí es lo siguiente: Se dice: No sé si saldrá una contradicción. A lo que se podría contestar: No es cuestión de que *yo* lo sepa, sino de si el *cálculo* lo sabe. Y aquí se comportan los cálculos de manera muy distinta.

[[*La demostración en geometría y en aritmética*]]

Si tengo la ecuación $25 \times 25 = 625$, puedo hacer la prueba dividiendo. La operación es la prueba. Existen pruebas también en la geometría euclídea; por ejemplo, la prueba del teorema de Pitágoras. ¿Se trata de una demostración en el mismo sentido como lo puede ser la demostración de la ecuación anterior? Lo primero que acude a la mente es que en la ecuación dispongo de un método mecánico, cosa que no ocurre con la demostración del teorema de Pitágoras. Si presento a alguien la aserción del teorema de Pitágoras, no ve cómo se pueda demostrar. Tiene que buscar antes la demostración. Luego la pala-

bra "demostración" significa cosas distintas en aritmética y en geometría, y ahora vemos cómo podemos distinguir los cálculos atendiendo al tipo de su demostración.

En todas estas investigaciones existe el peligro de que los matemáticos procedan como si solamente se tratara de una diferencia *psicológica;* como si toda la diversidad consistiera en que la demostración de la geometría nos *costara más* que la de la aritmética. Pero, más o menos, es el mismo error que cuando se afirma: no podemos escribir infinitamente toda la serie de los números, como si *dependiera de nosotros.* En realidad una serie infinita *significa* algo distinto que la finita. Y aquí sucede lo mismo. La diferencia a que me refiero es una diferencia lógica. No se pregunta aquí si encuentro más o menos fácil una demostración, sino si *el cálculo* conoce *algún método* para llevar a cabo la demostración. (La palabra "conocer" se toma aquí como cuando se dice: El cálculo con números racionales "conoce" posibilidades distintas de las del cálculo con números enteros.) *Ésta* es la diferencia y no el grado de dificultad.

Bipartición del Ángulo

Haremos por dilucidar la cuestión poco a poco. Para llegar al asunto principal empezaremos así: ¿Qué es partir en dos un ángulo? Se ha de responder: Depende de lo que se entienda por verificación. Si medir vale como verificar, entonces la bipartición tendrá sentido distinto que si me sirvo de la demostración por los axiomas de la geometría. La palabra "bipartición" tiene, pues, sentidos distintos, ya que la bipartición empírica *significa* algo diverso que la construcción mediante compás y regla, y no vale decir: Los dos medios son métodos que llevan a lo mismo.

Entre los dos casos existe una relación, a saber, que puedo usar la construcción geométrica —del modo que sea— para la bipartición real del ángulo. Sin embargo, puesto el caso que por algún motivo no se pudiera, la geometría podría disponer todavía de algún método que también cabría llamarlo "bipartición del ángulo", aunque no sirviera para la división real del ángulo,[1] pues no se correría riesgo de confundir los dos conceptos de la bipartición.

1] Los dos procedimientos nada tendrían que ver recíprocamente. Faltaría el empleo.

El método empírico valdría también para la tripartición, pues tiene, asimismo, sentido trazar dos divisiones en un arco cuya distancia, al ser medida, resultara igual. En este sentido, me es dado hablar de tripartición del ángulo. Pero ya no podré decir lo mismo si se hace referencia a la construcción. Claro que sí se ha de poder hablar de la construcción de la tripartición con analogía a la bipartición. Pero en este caso habrá que preguntar: ¿Qué significa aquí "analogía"? [134] Desde luego que en sí no es más que una palabra. Si quisiera decir: Tengo cinco sentidos y con analogía me imagino un sexto sentido, ¿habría afirmado algo? (Vale decir lo mismo de la observación de Helmholtz sobre que en sus mejores momentos podía representarse un espacio cuatridimensional, o lo que es lo mismo, que el espacio cuatridimensional sería análogo al representable tridimensional.) [135] En todo esto se hace mal uso de la palabra "analogía"; dígase lo mismo cuando se habla de la construcción de la tripartición del ángulo. Uno piensa que se trata de trazar líneas auxiliares, de servirse del compás y describir arcos, de aplicar la regla y de unir puntos, cortar esas líneas, y cosas parecidas. Pero en esta acción exterior no consiste la construcción, sino que la esencia de la construcción es el *método*. Si hablamos del *método* de la bipartición, no puedo hablar del método de la tripartición fundándome en la analogía; no puedo formar la analogía.

Se podría preguntar: ¿A qué se debe, pues, que mediante la construción lleguemos a lo mismo que mediante la prueba empírica? Respondería: No es propiamente "lo mismo"; es que la palabra "bipartición" es plurisignificativa.

Si contemplo como criterio la construcción, no podré controlar la división del ángulo por la medición posterior.* Se trata de lo siguiente: Si en la remedición aparece una diferencia, diré: El compás es irregular, no era una recta propiamente, etcétera. Pues la construcción es ahora el *patrón* de que me estoy sirviendo para juzgar de la bondad de la medición.

Por ende mediante los axiomas y la construcción no puedo experimentar nada referente al resultado de la medición empírica. (No tienen nada que ver una y otra cosa.)

He aquí un símil de lo que ocurre en este asunto: Una de-

134 Véase más arriba, págs. 126 *s.*

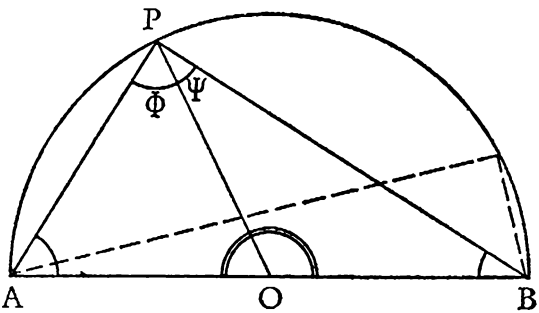
135 Helmholtz había dicho precisamente lo contrario *(Vorträge und Reden* II, Braunschweig, 1903, págs. 8 y 28). Debe tratarse de algún otro matemático.

* Volver a medir. [T.]

mostración con métodos *transfinitos* y otra por *cálculo numérico* no tienen que llegar necesariamente al mismo resultado. No me importa hasta qué punto coincidan; me basta con decir: Si no coinciden no es que exista conflicto entre los dos métodos de comprobación, sino que hemos demostrado dos cosas totalmente distintas. Tienen en común los dos procedimientos la apariencia de las fórmulas a que llegan, es decir, la igualdad de las palabras con que expresamos las fórmulas. Es que la fórmula es también plurisignificativa en este caso, y esto es todo lo que logro recabar. Desde luego que obra aquí un problema, pero es problema *matemático,* no filosófico; no se trata, por otra parte, de alguna cuestión vital de las matemáticas.

Por donde quiera mirar este asunto, me aparecerá siempre que podemos *demostrar* que todo sistema de reglas es un cálculo.

La generalidad en geometría



Teorema de Tales:

$$\varphi = A$$
$$\psi = B$$
$$\varphi + \psi = \tfrac{1}{2}\ (\varphi + A + \psi + B)$$

$$= \tfrac{1}{2}\ (\sphericalangle AOP + \sphericalangle BOP)$$
$$= \tfrac{1}{2}.\ 180^\circ = 90^\circ$$

Cabe preguntar: ¿Demuestra la prueba realizada con una figura que el teorema vale también con otra? ¿O solamente lo demuestro para esa figura y posteriormente extiendo la prueba también para los otros triángulos? Los matemáticos serían muy tontos si creyeran esto último. El error se debería a lo siguien-

te: No estamos tratando de los trazos sobre el papel (la *cuestión* consiste propiamente en saber si el teorema vale para este dibujo), sino que la figura propiamente es en sí un simbolismo; es decir, que estamos operando con líneas y trazos a lápiz siguiendo ciertas reglas, y son estas *reglas* lo esencial y no los trazos. Lo que también se podría expresar así: Aquí los trazos no son trazos como si fueran parte de la realidad, sino como piezas del juego, a las que hemos asignado unas reglas. Así, pues, la prueba no trata *de* la figura dibujada, sino que ésta es como una notación mediante la cual logramos expresar la demostración o una parte de ella, de forma muy fácil y evidente.

Hay que distinguir: El ejemplo como este caso, y el ejemplo como caso del juego de una proposición general. Ambas cosas son distintas.

$$2\ 3\ 4 = 4\ 5\ 6$$
$$\ldots\ 2\ 3\ 4\ \ldots = \ldots\ 4\ 5\ 6\ \ldots$$

Olvidaba que estaban los puntitos...

Se procede como si entre la generalidad y la particularidad se pudiera insertar algo; a saber, el ejemplo. Ahora bien, con el ejemplo, o se quiere indicar el ejemplo y nada más, o veo en él también la generalidad. En este caso, el ejemplo es la *expresión* de la generalidad. Y esto es todo. La generalidad está en las *reglas* que he fijado antes del comienzo del juego (luego, antes de que demostrara nada). En esas reglas entran punto, recta, etc. como variable.

Vale decir: Los trazos y puntos del papel constituyen un *cálculo*, y la figura dibujada sobre la que se lleva a cabo la prueba es esencialmente una *parte* del cálculo.[136]

Demostración indirecta II

La demostración indirecta tiene la forma: $p.q \rightarrow \sim p$. Se puede tomar de dos maneras: Que quede "q" (lo más usual) o que quede "p". Ejemplo: Demostrar que $\sqrt{2}$ es irracional.

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \ \ldots\ q$$

136 Sigue en el cuaderno de apuntes un párrafo sobre demostración e hipótesis en aritmética, que ya se halla en uno de los volúmenes de los *MsBd* de Wittgenstein.

$$\frac{(m,n) \;=\; 1 \;\ldots\; p}{(m,n) \;\neq\; 1 \;\ldots\; \sim p}$$

Se concluye: *Luego* no existe número racional cuyo cuadrado sea 2. Queda, por tanto, "q". Existe en efecto otra posibilidad aún. Queda "p" pero se tiene que cambiar la gramática de "$\sqrt{2}$". En este caso ya no se entendería por "$\sqrt{2}$" lo que entendemos ordinariamente.

¿Conoce el cálculo algún método para el hallazgo de futuras contradicciones?

Supuesto caso que se hubiera dado con una contradicción, ¿habríamos dispuesto del método para hallarla, ya desde el principio? Si así hubiera sido, se habría tratado de un descuido; habríamos olvidado revisar todas las posibilidades. De no disponer de ese método, entonces no es preciso hablar de contradicción, puesto que la contradicción solamente se da por el mismo método de su hallazgo.[137]

137 El resto del cuaderno (aproximadamente unas 16 páginas taquigrafiadas) consta de material que se halla ya, bien en los *Manuscritos* de Wittgenstein (de los cuales más tarde se publicarán extractos), bien en *PhB*.

VII

1 de julio de 1932 (Argentinierstrasse) [138]

CHARLA sobre la idea de que una proposición sólo se puede comparar con otra proposición; *v. gr.*, la predicción de un eclipse de sol con el acta de los astrónomos, pero no ha de haber confrontación de la aserción con la realidad.

WITTGENSTEIN: Naturalmente, existe la confrontación de la proposición con la realidad. Cuando afirmo: "Allí hay seis personas sentadas", se da la confrontación de la proposición al echar una mirada y comparar:
Una, otra, otra, otra,... (Wittgenstein mira alternativamente a la izquierda y a la derecha.)

En mi manuscrito [139] he hablado de un "colacionar" *(Kollationieren)*: *

Lista de las personas: Realidad:

—
—
—
—
—
—

Es distinto con la explicación elucidatoria, por lo mismo que *ésta* permanece dentro del lenguaje. En tal caso no existe confrontación del signo con la realidad.

En el *Tractatus* no veía claramente lo referente al análisis

[138] Hay motivos para suponer que el tema de esta conversación provino de un artículo de Carnap ("Die physikalische Sprache als Universalsprache der Wissenschaft" —"El lenguaje físico como idioma universal de la ciencia"— *Erkenntnis* 2, 1931, págs. 432-65), en que habla de la *comparación con un acta* y afirma que *la explicación elucidatoria permanece dentro del lenguaje* y discute las *hipótesis*.

[139] Esta palabra aparece varias veces en *PhGr.*

* Este neologismo de Wittgenstein es fácil de entender, pues su etimología es la misma que la del verbo "conferir": preposición "cum" (con) y verbo "fero" (llevar), del latín, mas esta vez se ha tomado el modo supino "latum" del mismo verbo "fero". Viene a significar presentar a la vez o al lado. [T.]

lógico y a la explicación elucidatoria. Creía en aquella sazón que existía "enlace entre el lenguaje y la realidad".[140]

Hipótesis III

Si en un campo cubierto de ruinas se empezaran a desenterrar fragmentos de columnas, capiteles y frontones, diríamos: Aquí hubo un templo.

Con el pensamiento completamos los fragmentos, llenamos los huecos y trazamos las líneas. Así procedemos con la hipótesis.

La hipótesis se diferencia de la tesis *(Satz)* por su gramática. Posee otra estructura gramatical.

Antes se creía que la hipótesis era una tesis cuya verdad poseía menos seguridad. Se venía a pensar: En la hipótesis no hemos probado aún todas las contingencias, por lo que estamos menos seguros de su verdad, como si el criterio dirimente fuera *histórico,* por así decir. Pero opino que la hipótesis, por el con-

140 Se hace alusión clara a la explicación elucidatoria en *TLP* 3,263. ("El significado de los signos primitivos se puede explicar por elucidaciones. Las elucidaciones son proposiciones que contienen signos primitivos. Sólo pueden entenderse si se conocen los significados de dichos signos."); al análisis lógico en *TLP* 3,2-3,201. ("En las proposiciones, se puede expresar el pensamiento de tal modo que los elementos del signo proposicional correspondan a los objetos del pensamiento. —A estos elementos los llamo 'signos simples', y a la proposición 'completamente analizada' "); al enlace entre lenguaje y realidad, en *TLP* 2,1511. ("La figura está, *por tanto,* ligada a la realidad; alcanza hasta ella.")

trario, es ya de antemano una estructura gramatical totalmen diferente.

Si tuviera que describir la gramática de la hipótesis, lo haría en estos términos: No procede de ninguna proposición parti cular ni de ningún conjunto de proposiciones particulares. Y en este sentido jamás puede comprobarse.

No es éste el concepto que trae Poincaré,[141] quien en las hi pótesis quería ver definiciones.

141 Poincaré opinaba así cuando se trataba de principios de mecánica *(La science et l'hypothèse,* París, 1920, pág. 112), pero no con cualquier tipo de hipótesis *(ibid.,* págs. 180 *s.).*

APÉNDICE A

TOTALIDAD Y SISTEMA

Los PUNTOS del espacio constituyen un "conjunto" en sentido muy distinto a como lo hacen, pongamos por caso, los libros o los sombreros. Todos percibimos que existe aquí una diferencia esencial y que esa diferencia ha de poder ser capaz de una formulación clara.

Tal diferencia está en conexión con la de las palabras *"significativo"* y *"verdadero"*. El conjunto de sombreros que hay en una habitación se expresa mediante una propiedad (función asertiva). Si conocemos la propiedad, no sabemos con todo si cae algo dentro de la propiedad, y en el caso de que sí lo sepamos, no sabemos cuántas cosas caen dentro de esa propiedad. Sólo la experiencia puede decírnoslo. A la extensión de la propiedad corresponde aquí una *clase de proposiciones verdaderas.*

¿Qué es un punto del espacio? Lo reconoceremos con sólo parar mientes en el uso significativo de los signos que denotan puntos espaciales. Un punto del espacio ocurre en nuestras proposiciones de modo muy diferente a como lo hace un objeto de la realidad; a saber, siempre sólo como parte de una descripción que trata de los objetos de la realidad. Para describir la situación de un cuerpo me basta con dar la distancia que lo separa de otros cuerpos fijos. A esta descripción corresponde un posible hecho atómico, independientemente de que la descripción sea verdadera o falsa. El punto espacial expresa por tanto una posibilidad; a saber, la posibilidad de la situación de un cuerpo con relación a otros cuerpos. La expresión de esta posibilidad requiere que la proposición que describe la posibilidad tenga sentido. A la totalidad de los puntos espaciales corresponde una totalidad de posibilidades; por consiguiente, una *clase de proposiciones con sentido.*

Una clase de proposiciones verdaderas queda delimitada de modo muy distinto que una clase de proposiciones con sentido. En el primer caso, la linde viene trazada al través de la experiencia; en el segundo, al través de la sintaxis del lenguaje. La experiencia delimita las proposiciones desde fuera; la sintaxis, desde dentro. El *recinto significativo* de una función (esto es, la totalidad de valores x por los cuales tiene significado fx) se delimita desde dentro, por la naturaleza de la función. Similar-

mente, la clase de los puntos espaciales queda delimitada desde dentro, al través de la sintaxis de las aserciones espaciales.

La concepción de Russell está mal, en primer lugar, en cuanto que construye los puntos espaciales a base de sucesos reales. Tal "espacio" alcanza solamente hasta donde llega nuestro conocimiento de los hechos reales. Entonces la totalidad de los puntos espaciales se convierte en la totalidad de la situación posible de un cuerpo, posibilidad que nosotros contemplamos desde fuera, y no podemos ni añadir ni descubrir ningún punto espacial. Solamente se puede descubrir en espacio y tiempo.

Esto coincide con nuestro sentir natural. Si un hombre permaneciera encerrado de por vida en una habitación, ¿no habría de saber que el espacio va más allá de la habitación? ¿Cómo lo sabría? Russell replicaría: Como hipótesis. Pero a todas vistas esa respuesta es absurda, pues lo que sabemos es solamente una *posibilidad* y ésta no *puede* ser una hipótesis.

La experiencia no nos puede dar el sistema de las posibilidades. La experiencia nos enseña lo que es, no lo que puede ser. La posibilidad, en cambio, no es un concepto empírico, sino un concepto de la sintaxis.

La falla básica de Russell es que siempre intenta retrotraer la posibilidad a la realidad, con lo que confunde la *descripción* con la *sintaxis* de esa descripción.

El espacio es la posibilidad del dónde; el tiempo la posibilidad del cuándo, y el número la posibilidad del cuánto.

Cuando se conexionan el espacio y el tiempo —o el número— con las propiedades eventuales del mundo, inmediatamente se echa de ver que se está en mal camino.

Espacio, tiempo y número son *formas* de la expresión. Son las que expresan toda posible experiencia y, por lo mismo, es erróneo fundarlas sobre la experiencia real.

Aunque en nuestro mundo no existieran clases de tales o cuales cantidades, todavía tendría sentido considerar dichas clases. No se debe desechar posibilidad alguna *a priori*, cosa que sucede cuando, con Russell, se definen los números como clases de propiedades *reales*.

Si Russell tuviera razón, entonces las dos aserciones: "En el punto temporal *t* tiene lugar el acaecimiento A" y "En el punto temporal *t* tiene lugar el acaecimiento B", tendrían igual sentido.

En segundo lugar, la concepción de Russell está también equivocada en cuanto que cree que se podrían construir los puntos espaciales a base de sucesos reales y los puntos así cons-

truidos someterlos a un orden. En realidad, los puntos espaciales ya están ordenados de por sí y es imposible pensarlos sin ese orden.

Podemos entender un dato espacial sin que tengamos conocimiento de los sucesos reales. Si para describir la situación de un cuerpo basta una proposición, entonces esa proposición contiene *todo* lo que se refiere a la situación, y lo que no se contiene en esa proposición no puede ser de importancia para el dato de la situación.

¿Podemos describir un punto espacial diciendo qué objetos se encuentran en ese lugar espacial? No, pues no sabemos cómo podemos llegar a ese punto espacial.

Pertenece a la esencia de un dato espacial mostrarnos el *camino* para llegar a un lugar espacial. Dar un punto espacial es dar un método para llegar al punto espacial.

Lo cual significa que el dato de un punto espacial contiene en sí la relación con los otros puntos espaciales, lo que quiere decir: *La relación entre los puntos espaciales es interna.* Si queremos manipular debidamente los puntos espaciales, debemos tener en cuenta a la vez todas sus relaciones.

Lo mismo se ha de decir del tiempo. Si bien puedo saber *qué* sucesos se desarrollan en un punto temporal, no por eso tengo que saber *cuándo* tienen lugar esos sucesos. El dato del tiempo es dato del cuándo pero no dato de la equitemporalidad *(Gleichzeitigkeit).*

La diferencia entre la cantidad de sillas de esta habitación y la cantidad de puntos espaciales se retrotrae a la diferencia entre *función* y *operación.*

Las partículas lógicas nos muestran que existen cantidades de diferente tipo. Sabemos cuál es la operación que da origen a las partículas lógicas. Si contemplamos perfectamente *una* partícula lógica, conocemos ya todas las partículas lógicas, y no es pensable que se puedan descubrir otras partículas lógicas. En cierto sentido, ya están todas ahí. Constituyen un sistema cuyo volumen y fronteras podemos comprender de antemano perfectamente.

Distingo entre *"totalidad empírica"* y *"sistema".*

Los libros y sillas de esta habitación son totalidades empíricas. Su extensión depende de la experiencia. Las partículas lógicas, los números, los puntos espaciales y temporales son sistemas. Es impensable descubrir una nueva partícula lógica, un nuevo número, un nuevo punto espacial. Tenemos la idea de

que todo procede de *una raíz*. Si conocemos el principio que subyace en un sistema, conocemos asimismo *todo* el sistema.

Una totalidad empírica se retrotrae a una *función asertiva;* un sistema, a una *operación*.

Las partículas lógicas son operaciones de verdad. Así el significado de la palabra "o" es la operación que, del sentido de las proposiciones "p", "q", saca sentido a la proposición "p ó q". Esta operación tiene su expresión en la construcción de la función de verdad. Las funciones de verdad se pueden construir sistemáticamente. Los números proceden por el continuado empleo de la operación + 1.

La operación surge siempre que nos hallamos con formas proposicionales que están ordenadas según una ley formal. Así, las aserciones

aRb
(∃x) aRx.xRb
(∃x,y) aRx.xRy.yRb

están ordenadas según una ley formal. La operación es el paso de una forma proposicional a otra. Permite que de una forma proposicional se origine otra. Si se conoce la operación, se pueden estructurar todas las formas proposicionales a partir de una.

Operación y función son dos cosas distintas. Una función no puede ser su propio argumento. Por el contrario, una operación se sirve de su propio resultado.

En matemáticas nos las habemos siempre con sistemas y no con totalidades. El error fundamental de Russell consiste en que no ha reconocido la esencia de un *sistema,* sino que ha tratado, sin hacer diferencia, las totalidades empíricas y los sistemas, mediante el mismo símbolo, la función asertiva.

Conocemos un punto espacial cuando sabemos el camino que conduce a ese punto espacial. Ese camino se nos da por medio de una forma proposicional (Por ejemplo: diez pasos adelante y luego cinco pasos a la derecha). A la totalidad de los puntos espaciales corresponde la totalidad de los posibles caminos, por consiguiente la totalidad de formas proposicionales. Como trabajamos con éstas, pasamos por alto todas las posibilidades. Solamente podemos prever lo que podemos crear; esto es lo que justifica nuestro sentimiento de que no podemos descubrir ningún punto espacial. Lo que quiere decir: No podemos descubrir ninguna forma proposicional.

Esto esclarece por qué las relaciones entre los puntos espaciales son *internas*. Las relaciones entre los puntos espaciales

equivalen a las relaciones entre las formas proposicionales que corresponden a los puntos espaciales. Cada forma proposicional está en relación interna con las demás.

La infinitud del espacio es la infinitud de la inducción matemática.

Es claro que con infinitud del espacio no expresamos nada *real*. Lo que sabemos a priori es —aquí como en todas partes— la *forma* en que expresamos las experiencias.

Y ahora surge la pregunta de si no necesitamos también experiencias para la explanación de la sintaxis. A lo que vale responder: Hay dos acepciones distintas de conceptos de "experiencia". La experiencia requerida para fijar la verdad de un aserto es distinta de la que se precisa para el entendimiento del significado de una palabra. La experiencia que se exige en las proposiciones es la primera de ellas.

Ecuación y tautología

En realidad, las matemáticas y la lógica tienen algo en común. Russell tiene razón en decir que tanto en matemáticas como en lógica se trata de *sistemas*. Ambos sistemas se reducen a operaciones.

Pero es erróneo considerar las matemáticas como parte de la lógica.

La verdadera analogía entre las matemáticas y la lógica es otra: A la operación que saca un nuevo sentido del sentido de las proposiciones dadas, corresponde también en las matemáticas una operación que consiste en sacar de números dados un nuevo número. O sea, *a la función de verdad corresponde el número.*

Las operaciones lógicas se llevan a cabo con proposiciones, mientras que las aritméticas usan números. El resultado de una operación lógica es una *proposición;* el de una operación aritmética, un *número.*

Pero la analogía entre lógica y aritmética concluye una vez que pasamos a examinar lo que la aritmética considera *ecuaciones* entre números. *La ecuación no es ninguna operación.* En $7+5 = 3+9$, $7+5$ y $3+9$ son la expresión de las operaciones; no así la ecuación es decir, la indicación de que diversas operaciones conducen al mismo resultado. Lo que correspondería a una ecuación entre números, si se tratara de la lógica sería no una función de verdad, sino la aserción de *que dos funciones de verdad significan lo mismo.* Pero no hay tal aserto.

No obstante, parecerá que sí existe ese aserto, a saber, la *tautología,* $p \equiv q$. Así se llega a la conclusión de que la ecuación se corresponde con la tautología. Pero no es verdad.

Podemos expresar un pensamiento de diverso modo. Por ejemplo, $p \supset q$ indica lo mismo que $\sim q \supset \sim p$. Para verlo, bastará con transcribir las funciones de verdad de uno y otro esquema; *aparecerá* entonces, con un solo vistazo a ambas funciones de verdad, que coinciden línea por línea. También podríamos demostrar lo mismo formando la equivalencia de las dos aserciones $(p \supset q) \equiv (\sim q \supset \sim p)$ convenciéndonos de que son una tautología. Ahora bien, ¿nos *dice* la tautología que los dos asertos significan lo mismo? No. La tautología nos muestra solamente lo que se muestra incluso sin tautología, a saber, que las estructuras de las dos funciones de verdad coinciden; sólo que lo muestra de modo diverso.

La tautología es, pues, únicamente un método para reconocer más fácilmente el acuerdo de dos funciones de verdad. No es la tautología lo esencial, sino *lo que se muestra en la tautología.*

Que $p \equiv q$ es una tautología, *muestra* que p y q significan lo mismo. Que $p \supset q$ es una tautología *muestra* que q se sigue de p. Que $\sim (p.q)$ es una tautología *muestra* que p y q se contradicen recíprocamente.

Lo característico en el uso de la tautología es que jamás empleamos la tautología en sí para expresar algo con ese tipo de forma proposicional, sino que nos servimos de ella como de un método para ver claro sobre la relación lógica que existe entre otras aserciones.

Si fuéramos ciegos nada nos harían ver los largavistas; si el lenguaje no mostrara ya todo lo lógico, la tautología no nos podría enseñar nada.

Al método de la tautología corresponde en matemáticas la demostración de una ecuación. El mismo momento que se emplea en tautología —a saber, el esclarecimiento del acuerdo de dos estructuras—, se emplea también en la demostración de la ecuación. Para demostrar un cómputo, vamos transformando las dos proposiciones [datos] hasta que se *muestre* la igualdad. El empleo de la tautología se basa en realidad en el mismo procedimiento.

Algo hay correcto, por tanto, en esta concepción. *La ecuación no es una tautología.* Aunque en la *demostración de la ecuación* subyace el mismo principio sobre el que se asienta el empleo de la tautología.

Común es a las matemáticas y a la lógica que la demostración que en ellas se emplea no sea ninguna proposición, sino que dicha prueba *demuestre* algo. La lógica demuestra *por proposiciones;* las matemáticas *por números.*

Hasta cierto punto es verdad que las matemáticas se fundan sobre la contemplación, esto es, sobre la *contemplación de los símbolos,* contemplación que se utiliza en lógica con el empleo de la tautología.

Concepto y forma [142]

La proposición no es un signo del hecho atómico, sino que lo describe. La proposición puede describir hechos atómicos pensados, por lo que no es ningún nombre. La sintaxis es la totalidad de reglas que determinan en qué enlaces tiene sentido determinado signo. No describe nada, antes bien delimita lo describible. El símbolo es el signo perceptible sensiblemente, mientras que las reglas de su empleo son su sintaxis. El entendimiento de la locución presupone el conocimiento de la significación y sintaxis de los signos. Sinsentido equivale a ser asintáctico. La filosofía es el esclarecimiento de la sintaxis del lenguaje; permite que se entiendan las proposiciones.

La forma de la proposición se da en la consideración del significado de las palabras, por su transformación en variable. La proposición que consiste en sujeto-predicado tiene forma diferente que la proposición de relación; la proposición simétrica de relación la tiene distinta que la proposición asimétrica de relación.* El hecho atómico es enlace de cosas. Las cosas vienen representadas en la proposición mediante signos, no así la forma del hecho atómico, que queda señalada por la forma de la proposición. El concepto se ha de aclarar, mientras que la forma de la proposición se muestra de por sí. La forma no es describible, puesto que la descripción es la que expresa la forma. Tener forma es tanto como ser figura; pensar o hablar equivale a figurar. Los conceptos se expresan por signos; la forma, la figura proposicional, se muestra de por sí. La forma no es una generalización ni ninguna propiedad general de al-

[142] Este parágrafo procede de los apuntes del señor Stein; véase el "Prefacio de la edición alemana", pág. 17.

* Proposición simétrica es aquella en que cabe la inversión de términos: Juan es hermano de Pedro (Pedro es hermano de Juan); si no es posible la inversión, la proposición es asimétrica: Juan es el padre de Antonio (pues no se puede decir: Antonio es el padre de Juan). [T.]

guna clase de proposiciones. Simetría y asimetría se muestran en las proposiciones, se contienen en la descripción, aunque no son propiedades, como amarillo y duro, que se expresan nominalmente por medio de una función asertiva. No es asimétrico el hecho atómico, sino el enlace semiótico por el que es expresado. La asimetría no hace referencia a la realidad, sino a la forma sintáctica de la descripción de la realidad; insinúa qué trazas tiene que poseer la simbólica para figurar el hecho atómico. Las palabras que denotan formas no son conceptos, sino instrucciones para la construcción de una simbólica, es decir, de figuras lógicas.

¿Qué es un número?

Las definiciones son indicadores de camino. Señalan el camino hacia la comprobación.

Condición de la verificabilidad es que todos los símbolos estén definidos y que entendamos su significado.

Lo que se esclarece mediante la definición es el empleo de un signo en la proposición. La definición dilucida el *sentido* proposicional.

La definición es una regla de transformación. Nos señala cómo se ha de transformar una proposición en otras proposiciones en las que no aparecerá el concepto correspondiente.

La definición retrotrae un concepto a otro u otros, éstos a otros, y así sucesivamente. La dirección de esta retrotracción queda fijada por el método de la comprobación.

Las definiciones que no cumplan con este propósito carecen de significado.

Según el principio de abstracción de Frege y de Russell, el número 3 es la clase de todos los ternos. Cabe preguntar al respecto: ¿Indica esa definición el camino a la comprobación?

¿Se logra verificar el aserto: "Aquí hay tres sillas" de modo que la clase de estas sillas se pueda comparar con todos los restantes ternos del mundo? No. Si podemos entender el sentido de esa aserción sin verificarla de dicho modo, señal es de que contiene *todo* lo esencial y de que el dato de los ternos no es de suma importancia para el número 3.

Si yo preguntara: "¿Cuántas sillas se encuentran en esta habitación?", y me respondieran: "Tantas como en aquella otra", podría replicar con razón: "No se ha contestado a mi pregunta. He preguntado cuántas sillas había aquí y no dónde se hallan otras tantas."

La definición de Russell no da lo que precisamente se busca. El dato de un número debe contener un método para llegar a ese número, y esto lo pasa por alto la definición.

No hay duda de que todas las clases que se pueden representar con unívoca reciprocidad poseen la misma cantidad de elementos. Pero el dato de estas clases no es el dato del número. O tomamos las clases intensionalmente como propiedades (funciones asertivas), y entonces el dato de la clase equivalente no nos dirá cuántos miembros contiene; o tomamos las clases extensionalmente como volúmenes, y entonces la descripción de tal clase contendrá una figura de la cantidad, y de nuevo no se consigue definir el número por tales clases.

El dato del número es el dato del cuánto y no el dato de la equipolencia numérica (Gleichzahligkeit).

¿Se puede creer en serio, siendo así las cosas, que dar la esencia del número 3 equivale tanto como a dar las propiedades bajo las cuales caen tres cosas? Se puede imaginar un mundo en que esas propiedades constaran siempre de cuatro elementos. ¿Es entonces el número 4, el número 3? Está claro, pues, que no debemos apelar a las extensiones de las propiedades reales, sino *a lo que hace posible describirlas.*

La clase de los ternos se diferencia del número 3, más o menos como un proceso psíquico, de un estado de concienciación.

En la definición Frege-Russelliana está equivocado, por consiguiente, el concepto de que no existe método de verificación. A quien dijera: Con todo, la verificación consiste en que comparemos una cantidad con otra, esto es, con la cantidad de nuestros signos numéricos, habría que responderle: Esto no es ninguna verificación, precisamente por lo siguiente: Si dijera que he representado una cantidad en base a una serie parcial de signos numéricos —o sea, que he contado— no indicaría ciertamente la clase de los símbolos numéricos reales que hay en el papel, sino el *símbolo* numérico. Luego, la serie de los signos numéricos no se define por una propiedad, sino que estamos frente a una *ley de construcción* a tenor de la cual se forma una serie de signos, y esta ley —no las propiedades reales— nos pone en situación de derivar, a partir del dato de *un* símbolo numérico, los consecuentes; es decir, nos permite reconstruir *toda* la serie. (El orden de nuestros vocables numéricos finca sobre la sintaxis de los números y no sobre sus propiedades reales.) Luego este procedimiento no *significa* ninguna figuración de una cantidad sobre otra, en el sentido que le dé la definición; no significa una representación *sobre* los

signos numéricos como *signos,* sino una figuración *a través* del signo numérico como *símbolo;* por consiguiente, una *expresión* de la cantidad.

¿Es, pues, cierto que un vocablo numérico está sintácticamente como *propiedad* de una clase? Sin duda, podemos entender un signo del tipo

||||| ciruelas

Si dicho signo basta para transmitir su significado, entonces ese signo ha de contener *todo* lo concerniente a su comunicación, y lo que no contiene es que no es esencial para su significado. Dicho signo contiene la *figura,* y no el dato de una *propiedad* o de una *relación.*

¿Se ha de entender ese signo como si indicara: La clase de las ciruelas está figurada unívocamente sobre la clase de los trazos que le preceden? En absoluto. Si dijera: La clase de las ciruelas es figurable sobre la clase de los trazos que se encuentran en la página 223 de tal libo; esto es, si *describiera* la clase de los trazos por una propiedad, entonces y sólo entonces habría figurado una clase sobre otra. Está claro que aquí los trazos no aparecen como una clase descrita —como una clase *de* la que se está hablando— sino que aparecen como la palabra "ciruelas", esto es, como componentes de la proposición. Los trazos aquí fungen como *símbolo,* no como *clase.*

La argumentación de Russell se basa, por consiguiente, en una confusión de signo y símbolo.

Los números son formas. La expresión del número es una figura que aparece en la proposición.

La proposición: "Hay dos cosas que poseen la propiedad f", se puede expresar así:

$$(\exists x,y)\,.fx.fy.\sim(\exists x,y,z)\,.fx.fy.fz$$

Aquí aparece el número 2 como un rasgo figurante de la simbólica.

El mismo Russell ha hecho uso de este principio de figuración en la introducción de *determinados* números. Para poder introducir el número 2, tiene que emplear un simbolismo de la misma multiplicidad que él quiera definir. Luego, es esta multiplicidad y no la definición lo que es decisivo.

La definición *define* algo y *muestra* algo. Al número le corresponde aquello que muestra la definición.

¿Se puede definir una forma? ¿Se puede definir, por ejemplo, la forma sujeto-predicado como la clase de todas las proposiciones sujeto-predicado? En dicha definición debería aparecer necesariamente la forma sujeto-predicado: para entender esa definición, deberíamos saber ya de antemano qué es la forma sujeto-predicado. Se ve claro que aquí no tenemos que manipular las proposiciones propiamente dichas, sino aquello que hace posible formar proposiciones.

Si una forma fuera definible, no la podríamos entender sin definición. La posibilidad de expresar un sentido se funda en que entendamos una forma sin necesidad de que nos sea aclarada. La proposición muestra su forma. No tiene sentido querer definir *aquello* sobre lo que descansa la posibilidad de toda comunicación y entendimiento.

La falla de esta concepción proviene de que se toma la forma como una *propiedad*. Se viene a considerar que la forma sujeto-predicado es una propiedad general que tienen todas las proposiciones sujeto-predicado.

La propiedad fx es una generalización de la propiedad fx.gx. La generalización lleva de una propiedad a otra.

La expresión de la forma se patentiza cuando se cambian en variable las partes constantes de la proposición. Esta transformación en variable es algo distinto de la generalización.

A la base de toda la lógica Frege-Russelliana subyace la confusión entre concepto y forma. Los números no son conceptos, pues no se llega a ellos mediante la generalización.

Tanto Frege como Russell han buscado el ser del número en una falsa dirección. Han creído que el número 3 es el resultado de una especie de generalización de 3 sillas, 3 ciruelas, etc. Y para expresar lo propio de esta generalización han ingeniado el principio de la abstracción.

El número 3 no es lo general de los ternos.

El número 3 proviene tanto de la generalización de los ternos individuales, como la forma de una figura de la generalización proviene de las figuras individuales.

El número 3 es la forma común de los ternos, mas no su propiedad común.

Puede aplicarse la forma 3, pero no definirse.

Las formas nada tienen que ver con la generalidad. Una forma no es ni general ni especial.

Las proposiciones de la aritmética no son las leyes *generales* que se emplean en casos concretos. Si digo: "2 ciruelas + 2 ciruelas son 4 ciruelas" y "2 sillas + 2 sillas son 4 sillas" no he

empleado la proposición 2+2=4 en dos casos distintos, sino que se trata de idéntico empleo.

Lo matemático por todas partes es lo mismo. No existe en matemáticas el "problema del empleo".

Esto está en conexión con que una forma no cae dentro de otra (la super- y sub-ordinación solamente se da entre conceptos). *El método de la expresión de los números es el método de la figuración.* El número se muestra en el símbolo.

Si hablo de 5 hombres, puedo representarlos mediante trazos. Pero el ser-cinco de los hombres no se representa en el ser-cinco de los trazos, sino que se expresa por ellos. Aquí tomamos inmediatamente el signo numérico como una figura.

El modo usual de expresión de los números con ayuda de los sistemas de guarismos se funda en el mismo principio. A primera vista, el número 387 no parece ser figura de la cantidad que significa. Pero hemos de parar mientes en que también valen para los signos las reglas de la sintaxis. Los signos 3,8,7 están definidos. Si retrocedemos hasta la definición de los mismos, esto es, si desmenuzamos paso a paso esos signos, daremos con la multiplicidad que significan; por ejemplo, 3= 1+1+1. Luego, habremos de tomar en cuenta que la posición de las cifras figura también algo. Nuestros signos numéricos contienen la posibilidad de la transformación en otros signos que, a su vez, se convierten en figuras inmediatas. Es decir, nuestros signos numéricos, junto con las reglas de la sintaxis, son instrucciones para la construcción de un símbolo figurable.

En medio de todos los símbolos aritméticos, de las abreviaturas, de los signos operacionales, ha de quedar siempre franco el camino de regreso a la expresión figurable. La simbólica de la expresión de los números es un sistema de reglas para la traducción en algo figurable.

Definir un número puede indicar dos cosas. Si por definir el número 3 se quiere indicar dar una clase de clases, se ha de concluir que en ese sentido 3 no es definible. Pero si por definir se entiende la definición *aritmética:* 3=2+1, 2=1+1, entonces sí que se puede definir 3. (Las palabras "simbolizar", "definir", tienen diverso sentido según se empleen en conexión con conceptos o con formas.)

Un vocablo numérico simboliza de modo muy diverso a como lo hace un concepto.

La definición de un concepto indica el camino a la *verificación;* la definición de un vocablo numérico (de una forma) orienta hacia la *construcción.*

En esto consiste que entendamos el significado de cualquier signo numérico escrito, sin que se nos aclare.

¿Podría existir una notación aritmética en que cada número se designara con un nombre propio? No. La aritmética involucra un número limitado de nombres propios (cifras) y explicita los restantes mediante la multiplicidad de la expresión. Siempre que tengamos que expresar un número ilimitado de posibilidades mediante un número limitado de posibilidades, el procedimiento de la expresión se fundará en que empleemos nuestros signos como figuras.

Lo infinito no es ninguna figura.

"Infinito" no es instrucción alguna para la construcción de una figura. Consiguientemente, lo infinito no es ningún número.

Al que afirmara: Otros seres podrían quizás expresar lo infinito, se le habría de replicar: ¿Podemos describir a ese ser? Con lo que se manifiesta que tal suposición nada ofrece.

La diferencia entre finito e infinito es de naturaleza lógica y nada tiene que ver con la situación empírica de nuestro psiquismo.

No podemos salirnos de nuestro mundo lógico para contemplarlo desde fuera.

Sentido y significado [143]

El sentido de una proposición es el método de su comprobación. Esta no es el medio de fijar la verdad de una proposición, sino el sentido mismo. A éste es al que hay que conocer para entender la proposición; darlo es dar el sentido de la proposición. No se puede buscar un método de comprobación. La proposición solamente puede decir lo que se determina por ella.

Preguntar es buscar requerimientos. Al final del movimiento cogitativo llega la respuesta. La dirección del movimiento cogitativo queda determinado por el lugar lógico de la respuesta. Las preguntas son diferentes si también lo son las respuestas. Entender una pregunta equivale a saber como respuesta el tipo de proposición. Sin respuesta no hay ni dirección cogitativa ni pregunta. No se puede buscar sin dirección alguna.

La respuesta, la expresión, el símbolo, tienen significado solamente en conexión con la proposición. Para representar el significado de una palabra, débese atender al sentido de las proposiciones en que aparece, a modo de comprobación.

[143] *Ibid.*, pág. 17.

Una aserción general que se comprueba mediante la inducción completa tiene que ser general de modo muy distinto a como lo pueda ser otra que se comprueba por casos individuales. La generalidad en un caso y otro tiene que significar algo diferente y, correspondientemente, también la expresión *clase*.

La expresión "clase" tiene tantos significados distintos como métodos existen para su verificación.

Si alguien dijera: "Existen infinitas sillas", de igual manera como se puede decir "Hay infinitos números primos", dicha aserción no sería falsa sino carente de sentido, puesto que no se podría verificar de manera alguna. Esto muestra que los dos conceptos de estas clases siguen reglas de sintaxis muy distintas y que, por ende, son también conceptos muy diversos.

A la base de las locuciones equívocas de la teoría de la cantidad está la idea de que se puede entender el significado de una clase sin parar mientes en si es finita o infinita, pues a lo más esto se puede determinar a posteriori. Cuántas sillas hay en esta habitación es una determinación eventual al concepto "silla en esta habitación". Esa cantidad no la podemos prever, mientras que "finito" e "infinito" no significan determinaciones eventuales al concepto de clase. No podemos pensar la misma clase una vez como finita y otra como infinita. En realidad, la palabra "clase" significa en un caso y otro cosas distintas. No es un concepto único e idéntico que quedara fijado con mayor determinación con la añadidura "finito" o "infinito".

Russell favoreció este error al hacer una simbólica que expresa de igual modo los dos tipos de clases, con lo que se cerró el camino a la inteligencia de esta diferencia.

Si la simbólica ha de ser correcta, ha de señalar la diferencia entre clase infinita y finita. La finitud y la infinitud se han de poder percibir por la sintaxis misma de las clases. Si las locuciones tuvieran que ser correctas no tendría que ocurrir la tentación de preguntar si una clase es finita o infinita.

"Infinito" no es ninguna cantidad. La palabra "infinito" tiene sintaxis distinta que un vocablo numérico.

Lo infinito ocurre en el lenguaje siempre del mismo modo, a saber, como determinación más precisa del concepto de *posible*. Decimos, por ejemplo, que una recta es infinitamente divisible o que un cuerpo se aleja infinitamente, etc. Pero se habla de una posibilidad propiamente y no de una realidad y la palabra "infiintamente" determina esa posibilidad.

¿Qué significa la aserción: Una recta es infinitamente divisible? La proposición versa sobre la posibilidad de la división. Si dijera que esta recta se puede dividir en dos, equivaldría a: La aserción "la recta se *ha* dividido en dos" tiene sentido independientemente de si ahora es cierta o falsa. En vez del vocablo numérico "dos" podría insertarse cualquier otro numeral. Asimismo, podemos incluir toda una serie de asertos, como: la recta se ha dividido en dos partes, la recta se ha dividido en tres partes, etc., en que la serie estaría ordenada según una ley formal. Podríamos plantear la ley de modo que insinuáramos la operación mediante la cual de una forma proposicional se pudiera originar la siguiente. Lo que sabemos *a priori* es la viabilidad de esa operación; esto es, sabemos de antemano que la proposición nuevamente formada también tiene sentido. Y esto lo sabemos por la estructura lógica de esa aserción.

Es claro que estas formas proposicionales no constituyen totalidad empírica alguna, sino un *sistema.* Ese sistema se da mediante el primer miembro y mediante la operación.

Al decir: "La recta es infinitamente divisible", ¿significa que el aserto: "La recta se *ha* dividido en muchas partes infinitamente" posee sentido? No, pues no existe dicha proposición. En primer lugar, no es verificable; en segundo lugar, no se puede describir en un sistema apropiado de signos. (Esto se verá más tarde.)

A la posibilidad de proseguir ulteriormente en la división corresponde la posibilidad de proceder siempre más en la serie de las formas proposicionales correspondientes.

Cuando decimos. "La posibilidad de una división es infinita", venimos a indicar: "La posibilidad de formación de formas proposicionales que describan esa división es infinita". *La posibilidad infinita se expresa mediante la posibilidad infinita.*

Así, pues, el concepto "infinito" es una determinación más precisa del concepto "posible". La posibilidad infinita aparece como *posibilidad infinita del lenguaje.* Pero no expresa que una aserción sobre lo infinito tenga sentido, pues dicha aserción no puede existir. Posibilidad infinita no significa: Posibilidad de lo infinito. La palabra "infinitamente" caracteriza una posibilidad, mas no una realidad.

La divisibilidad infinita de una recta es algo puramente lógico. Es evidente, desde luego, que *esa* posibilidad no se puede obtener experimentalmente.

Infinitud de la divisibilidad, continuidad del espacio y del

tiempo, no son hipótesis, sino indagaciones *(Einsichten)* sobre una forma posible de descripción.

¿No nos puede enseñar la experiencia que el espacio y el tiempo poseen una estructura discreta? Si al ir dividiendo una vara nos encontramos con un límite a nuestra operación, debido a motivos físicos, se trata de un asunto de experiencia que puede describirse mediante una proposición. Luego la negación de esa proposición también ha de poseer sentido, como podría ser: Hubiéramos podido describir ulteriores divisiones, de haber tenido esa posible experiencia. Se ve con esto que la divisibilidad del espacio hasta el infinito no es algo fáctico. La posibilidad que necesitamos es la posibilidad *lógica;* esto es, la posibilidad de una descripción, cosa que no tiene que depender de experiencias reales.

Es claro que no estamos frente a hipótesis, sino frente a algo que hace posible el planteamiento de hipótesis.

Si pusiéramos fronteras lógicas a la divisibilidad, deberíamos cambiar la sintaxis de nuestra expresión. Esto no significaría que excluyéramos de antemano ciertas experiencias, sino que renunciaríamos a expresar las experiencias con ese simbolismo. No se puede preguntar: ¿La naturaleza es constante o inconstante? Esta pregunta carece de sentido. La discontinuidad puede tomarse como aparente, pero lo mismo puede decirse de la continuidad. Esto muestra que no se trata de hechos, sino de determinaciones sobre la expresión de los hechos.

Parece que en muchos casos la infinitud puede aparecer en forma de hipótesis. Podríamos plantear, por ejemplo, la hipótesis de que las estrellas fijas del espacio euclídeo están repartidas hasta el infinito según una ley determinada. Tal hipótesis ¿habla de alguna experiencia infinita? Esto se ha de saber por el modo que tenga de comprobarse. "Estrellas fijas infinitas" tienen sentido solamente en conexión con una ley por medio de la cual expresamos la experiencia (ley de la gravitación). Luego pertenecen al tipo de expresión de esa ley. Esto es: Podemos establecer una serie de descripciones, en las que aparezcan 1, 2, 3, 4,... estrellas fijas y determinar que esas descripciones se aproximarán tanto más a la experiencia real cuantas más estrellas fijas supongamos. Cada una de esas aserciones individuales tiene sentido y puede comprobarse sin necesidad de la ley de la gravitación. La suposición de que existen infinitas estrellas fijas no se puede comprobar por sí sola, sino que se precisa del auxilio de la ley de gravitación. Luego la suposición acerca de la existencia debe tener un

sentido muy diverso que la suposición acerca de que existen 100 estrellas fijas; no puede ser una aserción independiente, sino que es parte de un *sistema de expresión,* con el que describimos la realidad.

Cuando, mediante una serie de círculos empíricos, medimos la relación existente entre sus superficies y el diámetro, obtenemos valores que más o menos se aproximan a π. *El número π no resulta de las mediciones particulares.* Si las mediciones dieran otro valor para esa relación, no diríamos: El número π tiene otro valor, sino: Nuestra medición fue inexacta. Es decir, que nos atenemos al número π y lo consideramos como patrón, de acuerdo con el cual medimos la bondad de nuestras observaciones. La geometría euclídea se funda en una determinación. El número π expresa una ley infinita que acompaña a las observaciones reales. Por mucha que sea la aproximación de la medición, la exactitud del número π no pierde el compás. Aquí se trata ya de una posibilidad infinita, mas no de una realidad infinita.

Las proposiciones de la geometría se refieren a una posibilidad infinita de exactitud en la medición. No describen las mediciones reales, sino que apuntan cómo debemos juzgar las mediciones reales.

Cuando se habla de estrellas fijas infinitas, se quiere decir: Suponemos la existencia de una ley infinita, a tenor de la cual describimos las experiencias reales. Esa ley es una determinación, mas no un aserto. Determinamos con ella cómo queremos interpretar las experiencias reales. Dicha ley alcanza hasta toda la exactitud pensable en la medición, y en ello finca la posibilidad infinita de esa ley.

"Infinitas estrellas fijas" es una determinación, pero no una experiencia.

Definición de Dedekind [144]

¿No se puede expresar mediante símbolos, al estilo de Dedekind, si una clase es finita o infinita? La definición de Dedekind dice que una clase es infinita cuando se puede figurar unívocamente sobre una auténtica subclase *(Teilklasse).* Esta aserción nada dice, mientras no se tenga un método para su verificación. Si ese método consiste en ordenar los elementos de la clase y de la subclase por medio de la enumeración, entonces no hay

[144] Comparar pág. 62 y nota 21.

ninguna clase que posea esa propiedad. La finitud está contenida ya en las reglas que se han de comprobar como si fueran aserciones sobre dichas clases; consiguientemente, dentro de la sintaxis de la clase. Si se toma como verificación otro método —a saber, la inducción—, entonces las palabras "todos", "clase" y "subclase" *significarán* algo distinto completamente y ya no cabrá preguntar si la clase es finita o infinita.

APÉNDICE B

TESIS

de Friedrich Waismann (hacia 1930)

LAS PROPOSICIONES que siguen tienen únicamente valor de aclaraciones, así como las explicaciones lo tienen sólo de perífrasis. El propósito de estas aclaraciones y perífrasis es el esclarecimiento de nuestros pensamientos. El producto no ha de ser otras proposiciones, sino el correcto entendimiento de las proposiciones.

1. Hecho atómico, hecho, realidad

Hecho atómico puede ser todo cuanto puede existir o no existir.

La existencia o no-existencia de un hecho atómico es el *hecho.*

La realidad es la existencia y no-existencia de hechos atómicos. (También la no-existencia de un hecho atómico determina la realidad con mayor precisión.)

La realidad consta de hechos, no de cosas. La realidad total es el *mundo.*

Un hecho puede tener partes que, a su vez, son también hechos. Por lo mismo, cada hecho atómico individual puede existir o no existir, independientemente de los demás hechos atómicos. A ese hecho se le llama *compuesto* (por ejemplo, mi campo visual).

Dos hechos pueden tener en común un hecho.

Dos hechos pueden coincidir también de otro modo; por ejemplo, el hecho "Esta mancha es amarilla" y el hecho "Aquella mancha es amarilla". Común a los dos hechos es el color amarillo, que por sí solo no es ningún hecho. Amarillo es rasgo que no se mantiene de por sí sobre los hechos.

Se puede descomponer el hecho atómico diciendo en qué rasgos coincide con otros hechos atómicos. Pero esa disección es factible sólo en el pensamiento, no en la realidad. Cada rasgo que aparece en un hecho atómico se llama también *elemento* (miembro, componente) del hecho atómico.

En el hecho atómico los elementos están concatenados mutuamente. El hecho atómico es una combinación de elementos.

Decir que un hecho atómico es *complejo* equivale a afirmar que tiene algo —un rasgo— común a otros hechos atómicos.

Cada hecho atómico es complejo.

El hecho atómico es descomponible solamente de *un* modo.

Lo que puede existir o no existir es la configuración de los elementos.

Los elementos son lo fijo, lo estable en el mundo; los hechos atómicos lo cambiable, lo inestable.

La variedad de los hechos atómicos consiste en que los mismos elementos pueden adoptar siempre nuevas configuraciones, pueden concurrir en nuevos hechos atómicos.

La existencia de elementos fijos no es una hipótesis. Si no existieran elementos fijos, sería imposible todo tipo de descripción.

El modo como los elementos están concatenados unos con otros es la *estructura* del hecho atómico.

La *forma* es la posibilidad de la estructura.

El elemento es algo que no se mantiene por sí solo, sino que se presenta exclusivamente en combinación con el hecho atómico.

Puedo conocer el elemento sin saber todavía en qué hecho atómico aparece, aunque sepa en qué combinación *puede* aparecer, es decir, conozco la forma del hecho atómico en que aparece aquél.

El color aparece solamente en combinación con algo espacial; el timbre sólo en combinación con determinado tono, etc.

La posibilidad del aparecer en el hecho atómico se contiene ya en el elemento. Esta posibilidad es su *forma*.

El elemento *tiene* ya una forma que no se le puede añadir posteriormente. No se puede *buscar* la forma de un elemento.

La totalidad de las posibles situaciones queda limitada por la totalidad de los elementos.

2. *Lenguaje*

Fabricamos nuestras figuras íntimas de los hechos. Esas figuras son nuestros *pensamientos*.

Lo que es pensado en los pensamientos es el *sentido*.

El sentido del pensamiento es la existencia o no-existencia de los hechos atómicos.

Objeto del pensamiento es siempre, por consiguiente, un hecho, jamás una cosa (miembro, elemento).

El pensamiento puede figurar todo hecho atómico, tanto el existente como el no existente.

Con el pensamiento llegamos más allá de la realidad.

En la *proposición* el pensamiento se expresa de manera sensiblemente perceptible.

El *lenguaje* es el método de expresar nuestros pensamientos de manera sensiblemente perceptible.

Los hechos sensiblemente perceptibles se llaman *signos.*

El lenguaje tiene que alcanzar tanto como nuestros pensamientos. No ha de poder expresar solamente los hechos reales, sino también los posibles.

Mediante el lenguaje nos entendemos. Pero esto es posible solamente si entendemos el sentido de la proposición, sin que sea preciso que se nos tenga que aclarar. Si cada vez se nos tuviera que explicar el sentido de una combinación de signos, jamás podríamos expresar nuevos pensamientos. El lenguaje ha de tener la posibilidad de comunicar un nuevo sentido con signos viejos.

De un sistema de signos, que es en lo que consiste un lenguaje, exigimos que podamos expresar cualquier pensamiento y que entendamos esa expresión del pensamiento sin que se nos explique.

El procedimiento de que se sirve el lenguaje para alcanzar dicho propósito es éste: Emplea signos que representan los elementos de la situación, y expresa la misma situación mediante la combinación de los signos correspondientes.

Por tanto, imita la construcción de la situación, conjuntando los signos del modo correspondiente.

La proposición nos muestra —como un modelo— de qué forma están conexionados los elementos en la situación.

Por esto entendemos la proposición sin que se nos aclare.

El *signo proposicional* es lo sensible perceptible en la proposición.

Tanto se ha de distinguir en el signo proposicional como en la situación. En ambos casos ha de haber la misma *multiplicidad.*

Esto se ve muy claro cuando se toman las proposiciones del lenguaje como instrucciones para hacer algo. Por mis palabras puedo dirigir a alguien a que entre en una habitación, diciéndole: "Avance tres pasos, etc." Aquí vese claro que el lenguaje ha de poseer la misma multiplicidad que los movimientos.[145]

145 Compárese más arriba, pág. 84, y *PhB*, págs. 57 *ss.*

La proposición *describe* el hecho atómico, y esta descripción consiste en que en el signo proposicional deducimos la forma de la realidad.

Sólo en cuanto vemos esa forma en el signo proposicional, nos *dice* algo el signo; y sólo en tanto *entendemos* la proposición.

El signo proposicional mismo es un hecho. Consiste en que los signos (las palabras) formen una conexión de determinado tipo, una determinada configuración.

No: "La proposición nos dice que el hecho posee tal y tal estructura", sino: "*Que* los signos de la proposición están unidos a un hecho de determinada estructura, *que expresa* que existe tal hecho atómico."

Sólo un hecho puede expresar un sentido.

La proposición no es una clase de palabras. La proposición está compuesta de miembros.

Por esto, lo que es lógicamente simple es inexpresable. No es posible decir qué es lo rojo o en qué consiste la esencia de lo dulce. Lo que permite descripción es, por lo mismo, complejo.

La posibilidad de todo entendimiento y comunicación descansa sobre la figurabilidad de nuestro lenguaje.

¿Se podría entender la gente con un lenguaje sin proposiciones? ¿Se podría construir, por ejemplo, un lenguaje en que los hechos mismos fueran representados por medio de signos? Tal sistema de designación sería bien posible. No se precisaría más que introducir un nuevo signo para cada hecho atómico. Aunque entonces el sentido de cada signo estaría perfectamente determinado, con todo, ese sentido tampoco se derivaría del propio signo, pues no lo podríamos entender si antes no se nos explicara. Estaríamos frente a un sistema de *señales,* que no sería lenguaje.[146]

Semejante sistema llegaría a poder designar una cantidad limitada de hechos, pero no nos podríamos entender con él.

La señal *denomina* la situación; la proposición la *describe.*

La proposición consta de palabras.

La *palabra* es todo aquello de lo que depende el sentido de una proposición y lo que las proposiciones pueden tener en común unas con otras.

La proposición tiene *sentido;* la palabra, *significado.*

Se conoce el significado de una palabra cuando se sabe emplearla.

146 Compárese más arriba, págs. 78 *ss.*

Del mismo modo como los elementos solamente ocurren en el hecho atómico, la palabra sólo lo hace en la proposición.

Las proposiciones son lo cambiable, lo mutable; las palabras, lo fijo, lo invariable.

El significado de las palabras ha de quedar fijado, mientras que el sentido de la proposición *resulta* de las palabras.

La forma de la proposición se prefigura ya en la palabra. Un adjetivo, por ejemplo, precisa de complementación distinta que la del pronombre relativo. Si sé el significado de una palabra, podré determinar en qué combinaciones cabe usarla y en cuáles no. No puedo descubrir posteriormente una nueva posibilidad de empleo.

La fijación del carácter sintáctico de una palabra consistirá entonces en que se señale la forma de la proposición en que aparece (por ejemplo: "x es amarillo", "x está a la derecha de y"). La añadidura de las variables posibilita el conocimiento de la complementación de que es capaz una proposición.

La palabra determina, junto con las variables, la posibilidad de una proposición.

Si apuntamos el esquema de esta proposición, determinamos con ello la *forma* de la palabra.

La sola añadidura de las variables no nos permite reconocer todavía la forma de la proposición. Debemos determinar, además, qué valores ha de tomar la variable.

¿Qué diferencia la variable de las constantes? Sencillamente lo siguiente: que para el signo de las variables rigen determinadas reglas de sustitución. Lo que dan estas reglas *determina* la variable.

Para dar la forma se requiere, por consiguiente, el examen de los valores que ha de recorrer la variable.

Las proposiciones que poseen la misma estructura *(Gestalt)* exterior —v. gr. "xRy"— pueden tener una forma distinta, según el examen que hayamos adoptado sobre las variables.

La forma de la palabra es la posibilidad de su aparición en la proposición. Cada una de esas posibilidades debe estar ya contenida en la palabra. Si se nos dieran todas las palabras, se nos darían también todas las aserciones posibles.

La combinación de palabras (de signos) se llama *expresión*.

También la palabra es una expresión.

La expresión que se convierte en proposición solamente cuan-

do se le añaden ulteriores signos, recibe el nombre de *insatisfecha.*[147]

Sólo mientras una expresión esté insatisfecha será posible combinarla con otras expresiones. (La insatisfacción es, pues, la fuerza que cohesiona las partes de una proposición.)

Por la forma de las palabras se conoce si una expresión está insatisfecha.

Cuando se completan todas las variables, cuando se satisfacen todos los lugares abiertos, surge la proposición.

Nada se puede añadir ya a la expresión satisfecha, es decir, a la proposición. La proposición es el cierre, la barrera de la combinación semiótica.

3. Sintaxis

Podemos fabricarnos figuras de los hechos.

La figura expresa la existencia o no-existencia de un hecho atómico.

Lo que la figura expresa es su *sentido.*

La veracidad de una figura descansa sobre la coincidencia de su sentido con la realidad.

Una figura puede ser verdadera o falsa, si difiere de lo figurado.

La curva de la fiebre puede figurar la fiebre verdadera o falsamente: tiene la multiplicidad de la fiebre, pero el paisaje no la puede figurar ni siquiera falsamente, pues posee otra multiplicidad.

Lo que la figura ha de tener en común con lo figurado, aun en el caso de ser falsa, es la *forma;* es decir, la posibilidad de la estructura.

La *verdadera* figura tiene también la *estructura* en común con lo figurado.

La figura puede figurar todo aquello cuya forma tiene, pero lo demás no.

La *sintaxis* consta de reglas que señalan en qué combinaciones una palabra tiene única y solamente un sentido. Mediante la sintaxis queda excluida la figuración de combinaciones verbales carentes de sentido.

Nuestra manera de hablar corriente posee una sintaxis.

[147] En terminología de Frege una aserción estaba insatisfecha si hacía relación a una función; en contraposición a la que estaba en lugar de un objeto.

Los mapas, apuntes, curvas de la fiebre, figuran la realidad, pero se presentan sin sintaxis.

¿Cómo se explica esa diferencia?

El mapa puede figurar la realidad verdadera o falsamente, pero jamás sin sentido. Todo cuanto exprese el mapa es posible, mientras que la descripción mediante locuciones puede ser sin sentido. Puedo decir, por ejemplo: "A está al norte de B y B al norte de A". Esta proposición no comunica nada, pues no posee la forma del hecho que debería expresar.

La sintaxis se conexiona, por tanto, con la posibilidad del sinsentido. ("Sinsentido" no es lo opuesto a "sentido", pues se puede decir: La proposición expresa un sentido, pero no: La proposición expresa un sinsentido. Lo que es sinsentido es el empleo de los signos.)

Se requiere la sintaxis allí donde la naturaleza de los signos aún no encaja del todo en la naturaleza de las cosas, donde caben más combinaciones de signos que situaciones posibles. Esa exagerada variabilidad del lenguaje debe estrecharse mediante reglas artificiales, reglas que son la sintaxis del lenguaje.

Las reglas de la sintaxis dan a las combinaciones semióticas la multiplicidad que han de poseer para que sean figuración de la realidad.

Se podría decir: Un sistema de signos que cuadrara perfectamente a su objeto, convertiría en superflua la sintaxis. Y a la inversa: La sintaxis convertiría a ese sistema semiótico en superfluo. Una cosa *funge* por la otra.[148]

Es importante que la forma del sistema de signos pueda representar la sintaxis, pues ello nos muestra que las reglas de la sintaxis no describen nada.

No es preciso ingeniar un "lenguaje ideal" para poder figurar la realidad. Nuestra habla corriente *es* ya una figura lógica, con tal que se esté de acuerdo en lo que designa cada palabra.

Todo queda, pues, en aplicar las reglas de la sintaxis a un determinado sistema.

Las reglas de la sintaxis son *reglas semióticas.*

La diferencia entre una regla semiótica y una aserción es: En la proposición los signos hacen las veces de las cosas. La proposición habla de la realidad mediante los signos, a través de ellos. Los expresa.

La regla semiótica trata de los signos en sí. Los signos no

148 Compárese más arriba, pág. 71.

representan las cosas, y por lo mismo la regla semiótica no arroja ninguna figura de la realidad: No es ni verdadera ni falsa.

Los signos que aparecen en la proposición son, por así decir, "transparentes"; no están en la regla semiótica.

La regla semiótica es una fijación acerca del empleo de los signos y tendrá significado solamente dentro de la notación empleada.

A primera vista la regla semiótica parece una proposición. (Por lo que a menudo se las confunde.) Si digo, *v. gr.*, que un lugar del campo visual no puede tener a la vez dos colores, estoy dando una regla de sintaxis y no una inducción. Pues la proposición no dice: "Un punto jamás tiene al mismo tiempo dos colores", sino: "Un punto no *puede* tener dos colores al mismo tiempo." Aquí la palabra "puede" significa la *posibilidad lógica,* cuya expresión no es una proposición sino una regla de sintaxis. (La regla delimita la forma de la descripción.)

Esto se ve muy claramente cuando pensamos describir el campo visual no con palabras, sino con un simbolismo matemático, al expresar, por ejemplo, el parámetro cromático como función del parámetro del lugar (y del tiempo). Entonces se pone en relevancia, mediante la *forma* de la descripción, que un punto en determinado momento sólo puede tener *un* color.

Para dar a nuestro lenguaje corriente la multiplicidad del lenguaje matemático basta con añadir la regla: Se han de excluir las proposiciones que atribuyen a un mismo punto diversos colores.

Esto aclara cómo podemos decidir si una proposición del lenguaje corriente significa una aserción o una regla semiótica: Observaremos si podemos hacer desaparecer la proposición al traducirla a un lenguaje de apropiada multiplicidad. Si desaparece, se trata entonces de una regla semiótica, pues es señal de que depende *solamente* de la notación, que es arbitraria.

4. Simetría, asimetría

Un caso en que fácilmente se puede confundir una regla semiótica con una aserción es la formulación de la simetría (o asimetría) de una relación.

Russell [149] define esta propiedad así: xRy es

$$\text{simétrico, cuando } (x,y).xRy \supset yRx$$
$$\text{asimétrico, cuando } (x,y).xRy \supset \sim yRx$$

[149] Whitehead y Russell, *Principia Mathematica* I, Cambridge, 1910, página 32.

A lo que hay que preguntar: ¿Las proposiciones aRb, bRa expresan diversos hechos o solamente el mismo?

La proposición "a es al mismo tiempo que b" patentemente expresa que se trata del mismo hecho que "b es al mismo tiempo que a".

Debemos distinguir, por tanto, entre simetría *esencial* (lógica) y *casual* (empírica), y asimetría.

Cuando la simetría se refiere a la simetría *lógica* no se puede expresar escribiendo:

$$(x,y)\,.xRy \supset yRx$$

pues esto presupone que xRy tiene sentido diverso que yRx. Esta proposición describirá la simetría empírica.

Para señalar que la colocación asimétrica de los signos "a" y "b" nada tiene que ver, debemos establecer la regla de que aRb significará lo mismo que bRa. Con esto recalcamos que determinado rasgo de la simbólica no es esencial, que nada figura.

Podríamos desaconsejar esa regla semiótica cuando ya desde el comienzo estamos utilizando un signo proposicional simétricamente construido.

La asimetría lógica se ha de formular de tal manera que el producto lógico de las proposiciones aRb y bRa se convierta en contradicción (lógica). (Lo que de nuevo sucede mediante una regla semiótica.)

En todos estos casos, se trata de dar a un sistema de signos la debida multiplicidad para que pueda figurar.

5. Identidad

Del mismo modo como unas veces designamos al mismo objeto como "a" y otras como "b", en el lenguaje corriente aparecen más signos que los necesarios para la figuración de hechos. Debemos explicar que esa demasía de signos no significa nada y que la diversidad de signos no es rasgo figurante de la simbólica. Esto es posible por medio de la regla semiótica "a=b". Si sé el significado del signo "a", mediante esa regla puedo saber qué se entiende por "b".

Por lo tanto, esa regla no habla de la realidad. No dice: Los objetos designados por "a" y "b" están mutuamente en relación de identidad; sino que trata de los signos como tales. Es una fijación respecto al uso de los signos.

Surge la falsa acepción de lo que es la identidad cuando se

toma el signo en su significado. Entonces parece como si "a=b" fuera una proposición que mediante los signos —a través de ellos— hablara de las cosas.

Pero se ve que la identidad solamente es una regla semiótica porque desaparece no bien nos servimos de un lenguaje en que cada objeto viene expresado a través de *un* signo.

Russell ha intentado formular la identidad de la siguiente manera: "Dos cosas, a y b, son idénticas cuando tienen en común todas sus propiedades".

$$a=b.=:(\varphi):\varphi!a.\supset.\varphi!b:Df$$

Este esquema no representa el ser de la identidad, pues para entenderlo necesito haber dado un significado a los signos "a" y "b" y al darles un significado sé si significan lo mismo o no.

Y lo propio hay que decir del intento de F. P. Ramsey.[150]

El error de Russell no está en haber formulado *mal* la identidad, sino en haber intentado *formularla*. Carece de sentido querer formular por una proposición *lo que* constituye la condición para la inteligencia de la proposición.

Con ello cae también el intento de Russell de definir por ejemplo la clase que consta de dos cosas, a y b, con ayuda de la identidad.[151]

6. Comprobación

Quien expresa una proposición ha de saber bajo qué condiciones la considera verdadera o falsa; si no puede hacerlo, es que no sabe qué es lo que ha dicho.

Entender una proposición equivale a saber cómo se presenta cuando es verdadera.

Se puede entenderla sin saber *si* es verdadera.

Para representar el sentido de una proposición debe tenerse en claro el proceso que conduce a la fijación de su verdad. Si no se conoce ese procedimiento, no se puede entender tampoco la proposición.

Una proposición no puede decir más de lo que queda fijado a través del método de su comprobación. Si digo: "Mi amigo está enojado" y lo determino porque muestra una actitud par-

150 Compárese más arriba, págs. 166 *ss.*

151 Compárese, por ejemplo, *Introduction to Mathematical Philosophy*, Londres, 1920, pág. 12.

ticular sensible, sólo *indico* que muestra esa actitud, y si quiero indicar más, no puedo decir en qué consiste ese más. Una proposición solamente dice lo que dice y nada más.

El sentido de una proposición es el modo de su verificación.

El método de la verificación no es un medio, un vehículo, sino el sentido mismo.

Puedo decir: "Viajo (en automóvil) a A" o "Voy a pie a A", con lo que he hablado de dos vehículos para lo mismo, es decir, para el alejamiento en el espacio. Pero no puedo decir: "Compruebo la proposición de ésta *o* aquella forma". El método de la comprobación no es algo que se añada al sentido. La proposición *contiene* el método de su verificación. No se puede *buscar* un método de comprobación.

Que una aserción tiene sentido significa que puede comprobarse.

Si una aserción tiene sentido no puede ser jamás cuestión de experiencia, pues la experiencia solamente nos enseña si una proposición es verdadera o falsa, y para fijar si una proposición es verdadera o falsa debo haberla dado un sentido.

Por tanto, que una proposición tenga sentido no puede depender de si es verdadera.

Si dos proposiciones, bajo las mismas condiciones, son verdaderas o falsas, tienen el mismo sentido (aunque nos parezcan diferentes).

Si determino bajo qué condiciones una proposición es verdadera o falsa, fijo al propio tiempo el *sentido* de la proposición. (Esta es la base de las funciones de verdad.)

¿Puedo dudar *siempre* de si una proposición se ha logrado comprobar? ¿No puede ser que las verificaciones sólo logren hacerla probable? Si no puedo asegurar bajo qué condiciones la proposición puede pasar por comprobable, es que no le he dado sentido alguno. La aserción que no puede ser comprobada definitivamente no es comprobable en absoluto.

La duda absoluta no es justificable.

La proposición que no se puede verificar en modo alguno, carece de sentido.

No existen cuestiones irresolubles.

¿Qué es una pregunta? Un estímulo para buscar. La pregunta lleva el movimiento cogitativo al otro extremo donde está la respuesta. La dirección de ese movimiento está determinada por el lugar lógico de la respuesta. Si no existe la respuesta, falta también la dirección en que se ha de buscar, ni existe

tampoco el movimiento cogitativo, lo que quiere decir: *No existe pregunta alguna.*

Solamente se puede preguntar donde se puede buscar, y solamente se puede buscar donde existe un método de búsqueda. Por buscar se entiende buscar sistemáticamente.[152]

Una aserción no tiene sentido porque esté construida regularmente,[153] sino porque cabe comprobarla. Toda aserción verificable es por lo mismo de construcción regular. Si doy el método para la comprobación, determino con ello la forma de la proposición, el significado de sus palabras, las reglas de la sintaxis, etc.

Para comprobar qué significa un signo, se debe preguntar: ¿Cómo se puede comprobar la proposición en que aparece ese signo?

La misma palabra puede tener significados diferentes si ocurre en proposiciones que se pueden comprobar de modo diverso. Es que nos las habemos con distintos símbolos que solamente por casualidad tienen el signo en común.

Así, por ejemplo, la palabra "amarillo" significa en la vida corriente algo distinto de lo que quiere decir en física, pues en un caso la proposición acerca de lo amarillo se comprueba mediante la observación, mientras que en el otro se hace por la medición de las longitudes de onda. (Si no se atiende a esta diferencia, parece como si los colores vistos fueran algo incompletos, como si, por ejemplo, el infrarrojo fuera su complemento.)

7. *Definición*

El signo que se ha utilizado siguiendo unas reglas es el *símbolo.* El signo es lo perceptible sensiblemente en el símbolo. (Dos símbolos pueden tener en común el signo, en el cual caso el signo simboliza cosas distintas.)

El modo de empleo de un signo es su *significado.*

El significado es lo común a todos los símbolos que se pueden representar recíprocamente.

Por ejemplo, la negación es la regla común conforme a la cual se han construido las proposiciones siguientes: $\sim p$, $p|p$, $p \supset \sim p$, etc.

Dar significado a un signo quiere decir establecer una regla para su empleo.

152 Compárese más arriba, págs. 30 *ss.* y *passim.*

153 Seguramente una alusión a R. Carnap; compárese, por ejemplo, su "Ueberwindung der Metaphysik, etc." en *Erkenntnis,* 2 (1931), pág. 227.

A un signo le podemos dar significado de dos maneras distintas: 1. Mediante una *indicación:* En este caso damos a entender el empleo de una palabra en las aserciones, construyendo con esa palabra diversas proposiciones y señalando cada vez al hecho correspondiente. Así nos enteramos del significado de la palabra. (Esa indicación consta propiamente de dos actos: del acto externo con que se señala a los diversos hechos, y de una operación cogitativa, a saber, la introyección de lo que hay de común.) 2. Mediante *definición:* Aquí se explica el significado de un signo con ayuda de otros signos que ya tienen significado.

La definición queda dentro del lenguaje. La indicación se proyecta fuera del lenguaje y coloca los signos en relación con la realidad. La definición se puede expresar en el lenguaje; no así la indicación.

Común es a la indicación y a la definición dar una regla para el empleo de un signo.

Se conoce el significado de un signo cuando se entienden el sentido de las proposiciones en que ocurre.

Por consiguiente, definir un signo quiere decir: explicar el sentido de las proposiciones en que aparece.

La definición consiste, por tanto, en dar una regla que dice cómo se ha de expresar el sentido de una proposición en que aparece ese signo, por medio de otros signos.

La definición es una regla de traducción: traduce la proposición en otros signos.

El signo de una proposición se conserva a pesar de la traducción.

La definición es regla semiótica: no es ni verdadera ni falsa.

La definición debe ser *completa.*

Si introducimos un signo mediante la definición, debe ser introducido en todas las combinaciones. No podemos definir un signo fragmentariamente explicando su significado para una clase de casos una vez, y otra para otra clase. (Russell, por ejemplo, contempla la negación ante una proposición elemental como signo básico no definido y la vuelve a explicar otra vez si la negación aparece ante una aserción general.)

La definición explica el significado de un signo mediante otro signo. Un signo señala a otro, éste a otro, etc., con lo que los signos aparecen ordenados.

Un signo señala el camino que conduce a los otros signos por los que es definido.

Si resolvemos los signos de una aserción, sustituyéndolos mediante otros signos de acuerdo con la definición, éstos mediante otros, etc., paso a paso se hará visible el camino de la comprobación.

Las definiciones son hitos que señalan el camino a la verificación.

Decíamos antes: La proposición contiene el método de su verificación. Esto es cierto en el sentido de que la proposición contiene las definiciones de los signos con los que está construida; estas definiciones nos guían durante la comprobación.

El camino de la comprobación no puede llegar hasta el infinito. (Una "verificación *ad infinitum*" no sería ya verificación.)

Una proposición puede retrotraerse a otra proposición, ésta a otra, etc., pero finalmente tenemos que llegar a proposiciones que no se refieran a otras, sino a la realidad. O mejor: La proposición con sentido habla ya de la realidad, al través de toda la cadena de la definición.

Si esto fuera de otro modo, no se podría comprobar proposición alguna. No habría conexión entre lenguaje y mundo.

Las proposiciones que tratan inmediatamente de la realidad se llaman *proposiciones elementales.*

No es ninguna hipótesis que existen proposiciones elementales. La exigencia acerca de la existencia de proposiciones elementales es la exigencia de sentido para nuestras aserciones. Que entendamos las proposiciones de nuestro lenguaje diario responde al hecho de que existen proposiciones elementales.

Las proposiciones elementales son las que dan sentido a las demás proposiciones.

Podemos entender las proposiciones de nuestro lenguaje corriente sin saber cómo son las proposiciones elementales, del mismo modo como entendemos la mayoría de las expresiones sin poseer conocimiento acerca de su definición, o cómo nos movemos, sin saber en qué consiste cada movimiento.

Podría preguntar alguien: ¿Cómo es posible que entendamos las proposiciones de nuestro lenguaje corriente, sin conocer las proposiciones elementales? La respuesta es: *Emplear una regla* no quiere decir *conocer la regla.* Podemos, *v. gr.,* introducir nuevos signos mediante la definición y descomponer, también mediante definición, los ya conocidos. Sólo en este último caso la definición nos *aclara* el sentido de las proposiciones; pero podemos conocer éstas sin saber el contenido de la definición.

Del mismo modo, el análisis lógico nos aclara el sentido de

las proposiciones al desmembrar sus signos, pero no les da el sentido. Al llegar al final del análisis completo de una proposición hemos de tener el sentimiento: Esto ya lo habíamos querido indicar al expresar la proposición. (El análisis no nos debe sorprender.)

Si el sentido de nuestras locuciones no estuviera fijado, ¿cómo sabríamos *cuál* es el análisis correcto?

¡Qué curiosa es la opinión de los que dicen que solamente mediante el análisis lógico se *declara* qué queremos decir con las proposiciones del lenguaje corriente! ¿No sabré acaso qué quiero indicar cuando digo: "Hoy hace más calor que ayer"? ¿Debo esperar los resultados del análisis para saberlo? Lo que ocurre en realidad es lo contrario: Nuestras aserciones tienen ya sentido y este sentido es lo que determina al análisis lógico.

¿No nos podemos equivocar? ¿No nos podemos imaginar que estamos diciendo algo con una proposición, que al verlo con mayor detención aparezca carente de sentido? No, pues una aserción tiene sentido cuando existe método para su comprobación. Y viceversa: Si sabemos cómo hemos de comprobar una proposición, es que la proposición *tiene* sentido. Solamente estaremos indecisos mientras nos fijemos en el aspecto exterior idiomático de la proposición.

Analizar una proposición quiere decir reflexionar sobre cómo se puede comprobarla. Con las proposiciones elementales el lenguaje *toca* la realidad.

Dar las proposiciones elementales equivale a dar los hechos atómicos que hay en el mundo.

Es claro que las aserciones sobre los cuerpos (mesas, sillas) no son proposiciones elementales. Tampoco creerá nadie que con los cuerpos hemos alcanzado los últimos elementos de la descripción.

Lo que las proposiciones elementales describen son los fenómenos (los sucesos).

Vale decir: "Este cable está cargado de electricidad, *pues* el electroscopio muestra una desviación", pero no: "La mancha que aparece en el campo visual es amarilla, *pues*..." [154] Si para la comprobación de una proposición no puedo referirme a ninguna otra es señal de que la proposición es elemental.

La *forma* de las proposiciones elementales no se ve *a priori*.

La forma de las proposiciones elementales tiene que acomo-

[154] Compárese más arriba, pág. 85.

darse a la forma de los fenómenos y ésta no la podemos prever.

Si, pues, alguien preguntara: ¿Tienen las proposiciones elementales la forma sujeto-predicado? o ¿son diádicas?, demostraría que no ha entendido la esencia de las proposiciones elementales.

Nuestra tesis básica dice: *No deben existir hipótesis sobre las proposiciones elementales.*[155]

La forma de las proposiciones elementales solamente puede darse una vez que se tienen.

Esto debe quedar en claro: La construcción lógica de las proposiciones elementales no tiene por qué poseer la mínima similitud con la construcción lógica de las proposiciones de nuestro lenguaje corriente. Vemos, por ejemplo, que podemos describir el campo visual con un simbolismo matemático que no es de menor multiplicidad que las ecuaciones de la física. Aquí ya no se habla ni de sujeto-predicado, ni de relación diádica, etc.

Los signos que aparecen en las proposiciones elementales se llaman *signos primitivos* (signos elementales).

Los signos primitivos no se pueden desmembrar por la definición.

El significado de los signos primitivos solamente puede ser indicado.

Signos primitivos son aquellos que señalan directamente; los restantes signos indican indirectamente, mediante los signos primitivos.

Los signos primitivos constituyen *las lindes* del definir.

Que existen tales lindes se demuestra porque existen lindes en el camino de la comprobación. Estas lindes se muestran de nuevo en los signos primitivos.

¿Cuándo se *puede* definir un signo empleado? Éste es asunto que pertenece a la lógica y no es solamente cuestión de conveniencia.

La definición de los signos se ha de orientar por el camino de la verificación. Este decide, por consiguiente, cómo se ha de definir el signo con sentido que se haya empleado.

Solamente se podrá definir un signo si las proposiciones en que aparece no se han de comprobar inmediatamente; cuando aún no llegamos al final de la comprobación. Si se actúa como si *cada* signo fuera definible, como si todo dependiera, por así decir, de nuestra habilidad en ingeniar definiciones, entonces se está en un camino totalmente equivocado.

[155] *Ibid.*, pág. 160.

Si se pregunta, por ejemplo: ¿Se puede definir la palabra "amarillo"? Habrá que responder: Dependerá de cómo se querrá que se compruebe una aserción sobre esa palabra. Si tengo que comprobarla mediante lo que se ve, no podré definir la palabra "amarillo", si a pesar de todo lo intentara, lograría definir algo, pero no lo que esa palabra significa en *esa* situación.

Supuesto que pudiera declarar cada color diciendo de qué modo se obtiene mediante la combinación de los colores rojo, amarillo, azul, verde, blanco y negro, llamaría a esos símbolos equipolentes *elementos de la explicación*.[156] Dichos elementos de la explicación son los signos primitivos. Los signos primitivos deben estar dispuestos de tal modo que con su ayuda se pueda describir cualquier hecho atómico.

Si veo una mancha roja, ¿debo decir que lo rojo es una propiedad de la mancha? ¿O más bien: Es una propiedad de lo rojo encontrarse en aquel lugar? ¿Qué es cosa aquí y qué es propiedad? La pregunta es ociosa. La verdad es que las formas tradicionales del habla (substantivo, adjetivo, etc.) pierden del todo su significado no bien las empleamos con los fenómenos.

El hecho atómico —el fenómeno— es una combinación de elementos, pero nada en esa combinación indica que haya en ella algo cósico, algo de propiedad.

Y aquí cabe la pregunta: ¿Qué se puede indicar con esa diferenciación?

Frege creía que lo que enlazaba recíprocamente las palabras en la proposición —lo proposicional de la proposición— era el predicado. A los predicados posibles los llamaba *conceptos*, y de ese modo diferenciaba entre concepto y objeto.[157]

Se podría suponer que al describir los fenómenos nos hemos de encontrar una distinción análoga, a saber, que existe algo en el hecho atómico, que es lo formal, que enlaza entre sí los demás elementos, y algo que es cósico, que es lo que resulta enlazado. Mediante el predicado se designaría lo formal del hecho atómico, y por las demás partes proposicionales, lo cósico.

Esta diferenciación surge también al preguntar: ¿Qué es lo que enlaza unos con otros los elementos de la situación? Pero, ¿podemos siquiera preguntar de esa manera? Los elementos no

156 *Ibid.*, págs. 38 *s.*

157 Ninguna de estas expresiones aparece al pie de la letra en los escritos de Frege; compárese, sin embargo, por ejemplo: "Ueber Begriff und Gegenstand", *Funktion, Begriff, Bedeutung*, Göttingen, 1966, págs. 67 *ss.*

quedan enlazados entre sí *a través de algo*. Están conexos y esa concatenación es el hecho atómico.

¿Se ha aclarado algo con esa representación? Si se precisa de una masilla que cohesione los elementos, ¿qué será lo que cohesione la masilla con los elementos? [158]

La forma es la posibilidad de la estructura y ésta se presenta inmediatamente por la combinación de los elementos.

Ya no es posible preguntar: ¿Significan los signos primitivos algo cósico? ¿Establecen propiedades o relaciones? Lo que muestra únicamente que las categorías del habla común no bastan para describir los fenómenos.

Los elementos son simples. Por eso, no pueden ser descritos.

¿Qué se puede describir? Lo que es complejo. La descripción de lo que es complejo consiste en decir de qué modo están relacionadas recíprocamente sus partes integrantes. Si éstas a su vez son también complejas, se pueden describir de igual manera, etc.

Y aquí surge la pregunta: ¿Se puede prolongar este proceso cuanto se quiera?

Supongamos que sí fuera posible. Entonces cada signo que apareciera en una proposición p designaría un complejo, y este complejo se podría describir de nuevo mediante otra proposición q. ¿Podría estar seguro que un signo, del que me sirvo para describir, tendría significado? No. Debería ver cada vez si *existe* el complejo; esto es, si la proposición q es verdadera. Dependería también de la experiencia que un signo tuviera significado, con lo que no sería posible descripción alguna.

Cada descripción presupone que en el mundo hay algo que es fijo, algo que es independiente de la existencia o no-existencia de los hechos atómicos. Esto fijo son precisamente los elementos.

Que existan elementos simples no es resultado de alguna teoría abstracta, sino que lo debemos saber fundamentalmente, además de que coincide con nuestro sentimiento natural. Puedo describir la mesa diciendo qué colores tiene, mas no puedo describir, a su vez, los colores rojo, amarillo, etc. ¿Puedo cambiar mi conocimiento de los colores en el curso de la experiencia? ¿Tiene sentido decir: "Cuantas más veces veo el color rojo más propiedades le descubro?" Es claro que aquí se da una especie

158 Argumento utilizado por F. H. Bradley *(Appearance and Reality,* Londres, 1897, pág. 33), al que se hizo alusión aquí en la primera recensión de las "Thesen".

de completud de nuestro conocimiento. Lo que significa que en relación con los elementos no podemos aprender más.

(Aprendemos los colores por experiencia, pero no es la experiencia de un hecho atómico.)

Existe un análisis, y sólo uno, de la proposición.

El análisis de la proposición aclara en qué modo se conexiona la proposición con la realidad.

Esta conexión se comunica mediante los signos primitivos.

Solamente si es posible desmenuzar la proposición hasta sus signos primitivos es señal de que está enlazada con la realidad; sólo entonces tiene sentido.

Si no se puede indicar el significado de un signo ni se puede retrotraer, mediante definición, a otros signos, queda cerrado el camino a la comprobación.

La totalidad de los signos primitivos *delimita* el lenguaje.

8. Objeto

Las proposiciones elementales describen el contenido de nuestra experiencia.

Las demás proposiciones no son más que el desarrollo de este contenido.

Aquí cabe la pregunta: ¿Cómo llegamos de las proposiciones elementales a las proposiciones de nuestro lenguaje corriente?

Nuestro lenguaje corriente tiene como propósito describir los procesos del mundo que nos rodea. No tiene como fin brindar la estructura lógica de los fenómenos. Describe, sin embargo, los procesos del mundo circundante al hablarnos de objetos (cosas, cuerpos), al declararnos sus propiedades o al relacionarlos, etc.

Tenemos que preguntar ahora: ¿Cuál es el simbolismo que explica un objeto?

Russell pensaba que un objeto —por ejemplo, la mesa— era la clase de sus aspectos.[159]

Una clase de aspectos se puede entender de dos maneras:

1. Un conjunto de aspectos que se pueden enumerar mediante una lista. No lo entendemos así cuando hablamos de una mesa.

2. Una propiedad de los aspectos, es decir, un rasgo común

[159] Compárese, por ejemplo, *Our Knowledge of the External World*, Chicago y Londres, 1914, págs. 89 *ss.*

que puede aparecer en forma de aspecto (por ejemplo, un color). Tampoco nos referimos a esto.

Que el simbolismo que expresa la mesa es de naturaleza diferente del de las funciones asertivas, se transparenta ya en el lenguaje ordinario, que trata de manera diversa los sustantivos, los adjetivos y los pronombres relativos. Las palabras "blanco", "más alto", "entre" obligan a emplear determinada forma proposicional. Por eso podemos representar sus formas lógicas mediante los símbolos fx, xRy, P (x,y,z).

Al paso que un sustantivo no exige forma proposicional determinada: acepta todas las formas que el dé la lengua. Esta diversidad ha de tener una base, que la comprensión correcta del objeto ha de poner en claro.

En realidad, el concepto de objeto está conexo con el de *inducción.*

La inducción se presenta en forma de hipótesis.

No entendemos por *hipótesis* la aserción, sino una ley para la formación de aserciones.[160]

Solamente pueden ser verdaderas o falsas las aserciones individuales, mas no la hipótesis.

Jamás se comprueba la hipótesis, pues siempre mira al futuro.

Su justificación yace en lo que presta, a saber, en la simplificación a la que lleva.

Aunque sean falsas las aserciones a las que conduce, ella no queda contradicha. Podemos tenerla inmediatamente otra vez con solo introducir nueva hipótesis. Si una hipótesis necesita siempre de nuevas hipótesis auxiliares, se vuelve insuficiente y deberemos abandonarla.

Simple, comprensible, probable son palabras sinónimas, si hacen referencia a alguna hipótesis.[161]

Hay hipótesis de forma matemática. Tales hipótesis son las leyes físicas.

Luego de observar la conducta de un gas bajo diferentes presiones y a temperatura constante, podré combinar esas observaciones mediante la ley: "p.v = const." Basado en esta ley, podré formar cuantos pares quiera de valores numéricos p, v. A cada uno de tales pares corresponde una descripción. La ecuación es un método para formar cuantas descripciones de ese tipo se quieran.

La ley natural no conjunta solamente las observaciones que se hayan hecho hasta el momento. Si se quisiera decir: Conjun-

160 Compárese más arriba, pág. 87.

161 *Ibid.*, págs. 87 *s.*

ta infinitamente las observaciones, a saber, todas las que se han hecho y las que se efectuarán, no se indicaría con todo que esa ley jamás se va a poder comprobar.

La ley natural no está formada con el *sentido* de las descripciones individuales, ni es una función de verdad de esas proposiciones, sino que es una ley matemática que combina los números que aparecen en esas descripciones. (Por eso mismo, la implicación general no es la expresión de esa ley natural.)

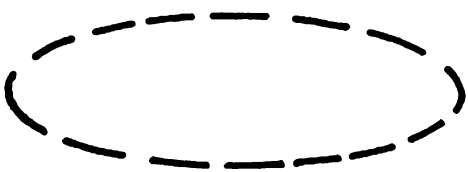
La física construye un sistema de hipótesis que se expresa por un sistema de ecuaciones.

El concepto de objeto involucra una hipótesis. A saber, la hipótesis de que los aspectos individuales que percibimos están conexos de manera regular.

Al decir: "Las diferentes figuras que veo pertenecen a un objeto, por ejemplo, a una mesa", se quiere indicar: Combino las figuras vistas mediante una ley tomada hipotéticamente; basándome en esa ley puedo deducir nuevas figuras de las figuras dadas.

Si quisiera describir los aspectos individuales todo sería enormemente complicado. La formación que lleva a cabo nuestro lenguaje ordinario consiste, pues, en conjuntar todos estos innumerables aspectos en una conexión tomada hipotéticamente.

La simplificación es del mismo tipo que la que efectúo cuando al ver la siguiente figura digo: Veo las partes de una elipse.



El lenguaje de cada día emplea un sistema de hipótesis, para lo que se sirve de los sustantivos.

Los aspectos están conexos espacial y temporalmente.

El objeto es el modo y manera como están conexos los aspectos.

El objeto es la conexión de los aspectos, expresados mediante una hipótesis.

Ejemplo aclaratorio: El objeto se parece a un cuerpo del espacio: los aspectos individuales son los cortes que le hacemos.[162]

[162] *Ibid.*, pág. 87, y *PhB*, pág. 282.

Lo que vemos son solamente los cortes individuales al través de las formas conexas que expresa la ley.

Bastará con conocer algunos cortes, para poderlos unir mediante una hipótesis; de modo similar puedo unir algunos aspectos por una hipótesis. Lo enlazante expresa también el objeto. La justificación de la hipótesis yace en su comprobación, a saber, en que por medio de ella pueda predecir la introducción de nuevos aspectos.

Con esto, se resuelve también la cuestión debatida de si el objeto "consta" solamente de los aspectos percibidos o también de los posibles. El objeto no consta en absoluto de aspectos, sino que echamos manos de un método mediante el cual derivamos aserciones sobre aspectos.

Russell no ha interpretado bien la naturaleza del objeto al tomarlo como *clase,* pues una clase de aspectos no nos ayuda a ganar aserción alguna sobre otro aspecto más. Ninguna relación existe entre clase e inducción, mientras que el objeto está en conexión esencial con la inducción.

Lo cambiante, lo inestable son los aspectos individuales; lo fijo, lo permanente, es la forma de la conexión de los aspectos. Esta conexión fija se señala mediante *una* palabra.

Siempre se ha sentido que en el objeto existe algo fijo o permanente y se ha expresado en la proposición: El objeto es el portador de sus propiedades. Y es correcto ver bajo el portador la forma fija de la conexión de los aspectos.

No es por casualidad que nuestra descripción del objeto queda siempre inconclusa. La posibilidad de tal descripción tiene que contenerse ya en la naturaleza del objeto, en la forma de la hipótesis.

Vemos aquí claramente que el objeto se comporta muy diversamente a como lo hace el elemento de un hecho atómico. Vemos también cuán fácilmente surgen errores filosóficos debidos a que se retrotrae a los elementos la categoría del objeto —a saber, la forma lógica del sustantivo— y se incurre en la tentación de describir un elemento como si fuera un objeto.

Todas las formas lógicas de nuestro lenguaje ordinario —la estructura sujeto-predicado, la estructura de relación— están íntimamente conexas con los objetos y se vuelven inaplicables en cuanto se intenta describir los mismos fenómenos.

La proposición: "El anarajando está entre el amarillo y el rojo" suena, por ejemplo, como: "La mesa está entre la silla y la ventana" por lo que tan fácilmente se dan en pensar que la

primera frase describe los colores. Es el empleo de la forma sustantivada lo que aquí nos conduce siempre a error.

Lo mismo vale decir de las funciones asertivas. El símbolo "fx" está tomado del caso en que "f" designa un predicado y "x" un sustantivo variable. Al extenderlo a las proposiciones elementales, las funciones asertivas (clases) pierden todo valor.

La hipótesis del objeto enlaza objetos de *diverso tipo*.

Con la palabra "mesa" no pensamos solamente en la conexión entre las diversas figuras visuales, sino también en la conexión que haya entre éstas y las sensaciones táctiles, etc. El objeto es lo que enlaza todos estos hechos.

La hipótesis está calculada para *más* que para la explicitación de *un* tipo de experiencia. Al hacer una determinada experiencia (pongamos por caso, ver la figura visual de una mesa), esperamos en virtud de la hipótesis, poder hacer también determinadas experiencias de otro tipo (sensaciones táctiles).

La hipótesis contiene al mismo tiempo ruedecillas sueltas: Mientras no aparezcan experiencias ulteriores, quedan sin utilidad y sólo entra en acción cuando cabe expresar dichas ulteriores experiencias.

Esto explica por qué podemos comprobar la misma proposición aparentemente de diverso modo.

Si digo, pongamos por caso: "Allí hay un reloj", y alguien me pregunta por qué lo sé, puedo replicarle: "Lo he visto" o "Lo he cogido y lo he palpado" o "He oído el tic-tac". Parece como si la misma proposición la hubiera comprobado de tres modos diversos.

Pero no ha sido así. Lo que he comprobado han sido distintos "cortes" mediante la misma hipótesis. Pero sucede que no describimos sólo el "corte" individualmente, sino que expresamos los fenómenos en conexión con toda la hipótesis.[163]

Si me hubiera estado cerrada una parte de la experiencia, si —por ejemplo— desde el nacimiento hubiera estado privado de la vista, la hipótesis del objeto *significaría* para mí algo distinto, algo menos.

Cuando se dice que "lo mismo" se puede comprobar de diferente manera, ese "lo mismo" indica más que lo que se puede comprobar de un solo modo.

El sustantivo no aparece sólo en una forma proposicional.

[163] Compárese más arriba, pág. 141.

Por lo mismo, la forma lógica del substantivo no se expresa al través de "fx", "xRy", etc., sino por medio de todo el sistema complejo de las reglas sintácticas que rigen para esa palabra.

Aquí se demuestra que nuestro lenguaje natural es superior con mucho a la simbólica artificial de Russell. El simbolismo de las funciones asertivas es muy útil mientras se trata de expresar algunas relaciones lógicas sencillas, incluso la inferencia. Pero falla ante la explicación de conceptos de los que nos servimos para describir la realidad.

¿Tiene sentido la pregunta: Cuántos aspectos se tienen que haber visto para asegurarse de la existencia del objeto? No. La hipótesis no ha de demostrar muchos aspectos. Que se acepte o rechace una hipótesis depende exclusivamente de lo que nos rinda dicha hipótesis.

Esto es lo que nos basta también en la práctica. ¿Qué pasaría si al mirar fijamente un libro se esfumara? ¿O si percibiera las figuras visuales, mas no las correspondientes impresiones táctiles? Tendría que concluir: *"No había tal libro,* aunque *creí* haber visto uno", lo que equivaldría a abandonar la hipótesis del libro. Y si digo: Está ese libro, es que acepto la hipótesis del objeto.

Se ve por todo esto que tiene sentido hablar de la *realidad* del objeto.

Es curioso que el predicado "real" se adhiera a los objetos y no a los fenómenos que, con todo, son lo único dado.

Explicación de esta peculiaridad es que el fenómeno es algo perentorio *(Einmaliges),* que la hipótesis que yace en el objeto señala hacia el futuro. El objeto procede según nuestras expectativas, por eso lo llamamos real.

Quien nada espera y nada teme escapa al mundo. El mundo se le torna "irreal".

Que las expectativas que se enlazan con la hipótesis del objeto se cumplan en cada momento no es evidente en modo alguno. Esto lo nota el realista de modo oscuro y expresa ese sentimiento de forma confusa: Las cosas son reales, teniendo razón al no entender por la palabra "real" algo metafísico, sino el acrisolamiento de la hipótesis.

La creencia en la realidad es creencia en la inducción.

9. El espacio lógico

El elemento es forma y contenido.

Elementos diversos pueden tener forma común, y se diferenciarán sólo por el contenido.

Los elementos que tienen la misma forma constituyen un *sistema* (por ejemplo, los colores).

Si se substituyen los elementos de un hecho atómico, del modo que sea, por elementos de la misma forma, se obtiene una clase de hechos atómicos que pueden existir o no existir. La totalidad de estos hechos atómicos, existentes y no-existentes, se llama *espacio lógico.*

El espacio lógico es la posibilidad de existencia o no-existencia los hechos atómicos.

Los hechos están en el espacio lógico.

En *un* espacio lógico están todos los hechos que poseen la misma forma.

Si me imagino una hoja de papel blanco cuadriculado, podré describir cada cuadrito con tal que dé dos números que indiquen la posición. A esos números indicadores de posición corresponden los elementos en el hecho atómico y a los cuadritos de la cuadrícula el mismo hecho atómico. Si en realidad existe determinado hecho atómico en la realidad, nos imaginaremos que el cuadrito correspondiente ha sido llenado de negro. La distribución de las manchas negras sobre el papel blanco es una figura de la realidad en el espacio lógico.

(Este símil sería exacto solamente si los hechos fueran independientes unos de otros, pero como no es éste el caso, se han de tener presentes algunas restricciones acerca de la distribución de las manchas.)

La realidad es una isla en la posibilidad.

¿Cómo sabemos que los colores constituyen un sistema? Si, por ejemplo, alguien sólo hubiera visto el rojo durante toda su vida, ¿no diría que únicamente conoce un color? A lo que hay que responder: Si todo cuanto viera fuera rojo y pudiera describirlo, tendría que poder formar la proposición: "Esto no es rojo", lo que presupondría ya la existencia de otros colores, o querría indicar algo que no podría describir y, por tanto, no conocería un color siquiera en nuestro sentido y tampoco podría *preguntar* si el rojo presupone un sistema de colores. Si, pues, la palabra "rojo" tiene significado, presupone ya un sistema de colores.[164]

Y lo mismo hay que decir de cualquier signo con significado

[164] *Ibid.*, págs. 59 y 78.

que se emplee. Si en la proposición "fa" aparece el signo "a", se presupone la posibilidad de otras proposiciones del mismo tipo, por ejemplo, "fb", pues si solamente existiera el hecho atómico fa, y no el fb, sería superfluo hablar de "a", y los *signos superfluos no significan nada.*

Esto muestra que cada proposición pertenece a un sistema de proposiciones.

ÍNDICE ANALÍTICO

PhB significa que todos los números que siguen se refieren a *Philosophische Bemerkungen*. No han sido registrados aquí todos los temas de esa obra o de las "Thesen" de Waismann, sino aquellos solamente que se han tratado en las conversaciones impresas en este libro.

Analogía, 97, 126*s*, 180
Axiomas, 30*s*, 91*ss*;
—como patrones, 175*s*;
—y comunicación, 56;
—y reglas, 105;
—independencia de, 114*s*, 128*ss*.

Barreras del lenguaje, 61, 82
Búsqueda, 199, 206, 215*s*, *PhB* 67, 77, 170*ss*, 175, 184*s*;
—en las matemáticas, 30*ss*;
—y método de la, 77*s*, 113, 127, 154;
—en lo infinito, 100*s*.

Cálculo, 100, 106*s*, 157*ss*, 178*s*, 181*s*;
—y empleo, 93*s*, 111*ss*, 123*s*, 150*ss*;
$->\!<$ prosa (teoría), 114, 118, 132, 145, 148*s*.
Comparación con la realidad, 76*s*, 184
Comprobación, véase Verificación.
Compuesta (proposición), 79*s*, 85, 94*s*.
Concepto $>\!<$ forma, 197
Contradicción, 131*s*;
—entre reglas, 168;
—solapada, 106, 153*ss*, 172*ss*, 183

Demostración, 152*s*;
—y análisis, 108, *PhB* 179;
—y cálculo, 118*s*;
—y empleo, 31;
—en geometría, 181*s*;
—indirecta, 126*s*, 158*s*, 182*s*;
—e inducción, 29*s*, 97*s*, 119*ss*, *PhB* 183;
—en matemáticas, 29*s*;
—y proposición, 29*s*, *PhB* 192, 233;
—y ver, 129, 130*s*;
(no es un vehículo), 29, 96, 99;
(dos demostraciones para lo mismo), 96, 180*s*, *PhB* 73, 179
Descubrimiento,
—en filosofía, 160*s*;
—en gramática, 56*s*, 69*s*;
—en lógica, 91, 114*ss*, 218*s*;
—en matemáticas, 56*s*, 154, *PhB* 120, 190;
—de un punto espacial, 188, 189;
—de Sheffer, 108*ss*, 128*s*, *PhB* 182*s*, 191*s*.
Distinto (sentido), véase Verificación.
Diversidad, véase Multiplicidad.
Diverso (sentido), véase Verificación.

Ecuación,
—y regla de sustitución, 133*ss*, 157*s*, *PhB* 143;
—y tautología, 30*s*, 93*ss*, 140, 191*ss*, *PhB* 126*ss*, 203
Einstein (sobre geometría), 33, 143
Elementos, 205*s*, 228*ss*;
—de la representación, 38*s*, 40, 220*ss*.
Empleo,
—de un cálculo, 111*ss*, 114*s*, 123*ss*, 150*ss*, 170*s*;
—de un juego, 144;
—de un lenguaje, 92;
—de las matemáticas, 30*s*, 197*s*, *PhB* 130*s*, véase Geometría;
—de una regla, 136*ss*.
Entender, 147*ss*, 214*s*.
Escala,
La proposición (sistema proposicional) como, 57*s*, 66, 70*s*, 77, 79, 163, *PhB* 76*s*, 110*ss*;
El número π (axiomas) como, 174*s*, 203
Espacio (forma de la expresión), 188

Ética, 61*s*, 81*s*, 102*ss*, 125
Explicación elucidatoria, 184*s*, 216*s*, *PhB* 54
Extensión y ley, 178, *PhB* 221*s*.
Extrapsíquico, 43*ss*, *PhB* 88*s*.

Fenomenología, 57, 59*ss*, 89, *PhB* 51, 53, 84, véase Lenguaje primario.
Figura (figuración), 43*s*, 49, 72, 211;
—incompleta, 34*ss*, 46*s* 49, 79, *PhB* 115*ss*.
Figurabilidad de la proposición (del lenguaje), 74*s*, 162*s*, 210, *PhB* 57, 61, 77*ss*.
Física, 57, 88*s*, véase Geometría.
Formalismo, 91*ss*, véase Frege y Weyl.
Frege,
—sobre los conceptos, 210, 221;
—sobre el formalismo, 92*s*, 122*s*;
—sobre la incontradictoriedad, 115*ss*;
—sobre los objetos, 37;
—sobre el ordenamiento, 146;
—sobre el significado, 132*ss*.

Generalidad (en geometría), 181*s*, *PhB* 152
Geometría,
—burda, 50*ss*, *PhB* 268*ss*;
Doble significado de la, 88;
—euclídea y no euclídea, 111*s*, 126, 127*s*, 158*s*, 172*ss*;
—y espacio visual, 49-55;
—y física, 64, 144;
—como sintaxis, 33, 55*ss*, 143*s*, *PhB* 216

Heidegger, sobre ser y angustia, 61
Hilbert,
—sobre la incontradictoriedad, 105*ss*, 121*ss*, 154*s*;
—sobre la independencia, 130;
—sobre la metamatemática, 121
Hipótesis, 85, 87*ss*, 141*ss*, 143*s*, 165, 185*s*, 188, 201*s*, 220, *PhB* 282*ss*;
—y verificación, 224*ss*
Husserl, sobre juicios sintéticos *a priori*, 60, 70*s*.

Identidad, 146, 166*ss*, 213*s*, *PhB* 141*ss*.
Incontradictoriedad, 33, 105*ss*, 115*ss*, 121*ss*, 126*ss*, 153*ss*, 169*ss*, 173*ss*;
—(demostración), 109*s*, *PhB* 189
Inducción, 29*s*, 40, 47, 64, 73, 83, 86*s*, 96*ss*, 119*ss*, 200, 204, 224*ss*, *PhB* 150, 187, 201*ss*, 283*s*
Inferencia, 58, 80*s*
Infinito, 66, 100, 164*s*, 178*s*, 191, 199*ss*, 218, *PhB* 146*ss*, 206*ss*;
—no es adjetivo, 90*s*;
(Definición de Dedekind), 62*ss*, 91, 203, *PhB* 151
Intención, 147*ss*, *PhB* 63*ss*.
Interno $>\!<$ externo, 48*s*, 139, 189, *PhB* 122
Interpretación, 99*s*, 124

Juego (del ajedrez) y las matemáticas, 91*ss*, 105*ss*, 117*ss*, 132*ss*, 144, 150

Lenguaje y mundo (símil de la película), 45, *PhB* 81, 98, 104

Matemáticas, véase Descubrimiento;
—no hay proposiciones lógicas en las, 41.
Medición, medida, véase Escala
Metamatemáticas, 107, 118, 121, *PhB* 180
Multiplicidad, 35, 39, 71*s*, 75, 85, 91, 94, 112, 119, 134, 138, 196, 199, 206*s*, 210*ss*, 213, *PhB* 57*s*.

Número (tipos de números), 32, 64*ss*, 74*s*, 90*s*, 96*ss*, 155*s*, 165
—de Brouwer, 65*s*, *PhB* 210
Definición de, 145*s*, 194*ss*;
—real, 64*ss*, 96*ss*, *PhB* 223*ss*

Objetos, 37*ss*, 39, 223*ss*, *PhB* 72, 119, 169, véase Elementos.
Operación $>\!<$ función, 189*s*.
Ordenamiento (equipolencia), 90, 146, 195, *PhB* 140

Positivas $>\!<$ negativas (proposiciones), 75*ss*, 79*s*, *PhB* 57
Primario $>\!<$ secundario (lenguaje), 40*s*, 57*s*, *PhB* 51, 58, 84, 88, 100, 103, 158, 168, 267

Probabilidad, 82*ss*, 86*s*, 215, 224, *PhB* 289*ss*.
Problema de la resolubilidad, 33, 115
Proposiciones elementales, 37*s*, 66*ss*, 81*s*, 218*ss*, *PhB* 106*ss*.

Ramsey (sobre la identidad), 166*ss*, 214, *PhB* 141*ss*.
Recuerdo, 85*s*, *PhB* 61*s*.
—como figura, 43, 77*ss*, *PhB* 81*s*;
—y tiempo, 47*s*, 49*s*;
sólo me puedo acordar, 43, *PhB* 81*s*, 84
Regla, 29*s*;
—y aserto (proposición), 113, 211*s*;
—y configuración de un juego, 105, 109*ss*, 117, 128, 139, 155, 157;
—y contradicción, 110*ss*, 171*ss*;
—y empleo, 136*ss*.
Religión, 104*s*
Rojo, "El mundo es...", 59*s*, 78, 229
Ruedas sueltas, 42*s*, 59, 227, *PhB* 51
Ruido, "¿Fue un ruido?", 95*s*, *PhB* 55, 121
Russell,
—sobre axiomas, 109*ss*, 114*s*;
—sobre configuraciones, 109*ss*;
—sobre identidad, 214;
—sobre incontradictoriedad, 107;
—sobre lo infinito, 100;
—sobre los objetos, 37, 223;
—sobre ordenamiento, 146;
—sobre proposiciones lógicas, 94;
—sobre "todos", 34*s*.

Ser $><$ parecer, 53, *PhB* 270
Sintaxis, 42*ss*, 56, 59, 66, 68*s*, 70, 80*s*, 91*ss*, 100, 111, 187*s*, 193
—y signo, 71, 198, 211
Sintético *a priori*, 60*ss*, 70*ss*
Síntoma, 94, 141
Sistema cromático, 38*s*, 57*ss*, 59, 69, 78, 162, 212, 229, *PhB* 51*ss*, 75*ss*, 105*ss*, 273*ss*
Sistema proposicional, 57*ss*, 79*ss*, 229, *PhB* 59
Sistema $><$ totalidad, 189, 191
Solipsismo, 40*ss*, *PhB* 85
Sujeto-predicado, forma, 37, 39, 41, 197, 219*s*, 226, *PhB* 119

Tautología, 93*s*, 116, 166*ss*, 191*ss*, véase Ecuación;
—e inferencia, 80
—y contradición (lógica), 124
Teoría, 148*s*, 222, véase Cálculo;
—en ética, 102*s*;
—en matemáticas, 115
—y juego, 118*ss*, 132*s*;
"Todos", 34*ss*, 39*s*, 45*ss*, *PhB* 116*ss*;
—los números, 72, *PhB* 150*s*;
—los números reales, 96*ss*;
—las proposiciones, 84
Tripartición de un ángulo, 32*s*, 127*s*, 179*ss*, *PhB* 177

Variedad, véase Multiplicidad
Verificación, 63*ss*, 85*s*, 112, 194, 198*s*, *PhB* 174;
—de una hipótesis, 185*s*;
—e inducción, 203*s*;
—como sentido de una proposición, 42, 70*s*, 199, 213*ss*, *PhB* 66*s*, 200*s*, 282, 289
—y definición, 217;
—y física, 140*ss*;

Weyl,
—sobre el formalismo, 91;
—sobre matemáticas, 33, 72*ss*

ÍNDICE GENERAL

Wittgenstein: Lista de obras citadas 7
Prefacio de la edición alemana 9

I

Miércoles, 18 de diciembre de 1929 (con Schlick) 29
[[La demostración en matemáticas]] 29
¿Qué significa la búsqueda en las matemáticas? 30
Ejemplo: División tripartita del ángulo 32
Símil: Deshacer un nudo 32
La geometría como sintaxis I 33
Incontradictoriedad I 33

Domingo, 22 de diciembre de 1929 (con Schlick) 33
[["Todos" I]] 34
Objetos 37
¿Qué significa "todos"? 39
Solipsismo 40
El sentido de la proposición es su verificación 42
Ruedas sueltas 43
[["*No puedo sentir el dolor de usted*"]] 43
[[Lenguaje y mundo]] 45

Miércoles, 25 de diciembre de 1929 (con Schlick) 45
[["Todos" II]] 45
Tiempo 47
Externo-interno 48
El espacio visual 49
Suplemento, 30 de diciembre de 1929 53
La geometría como sintaxis II 55
Física y fenomenología 57
Sistema cromático 57
¿Pertenece cada proposición a un sistema? I 58
[[*El mundo es rojo I*]] 59
Suplemento, lunes 30 de diciembre de 1929 59
Anti-Husserl 60

Lunes, 30 de diciembre de 1929 (con Schlick) 61
A Heidegger 61
Definición según Dedekind 62
Números reales I 64

Martes, 2 de enero de 1930 (con Schlick) 66
[[Proposiciones elementales]] 66
[["La situación gnoseológica actual en matemáticas"]] 72
La elección arbitraria 73
[[*Varia*]] 74

Domingo, 5 de enero de 1930 (con Schlick) 75
Proposiciones positivas y negativas 75
El color azul en el recuerdo 77
"El mundo es rojo" II 78
¿Pertenece cada proposición a un sistema? II 79
Inferencia 80
Conferencia sobre ética 81
Probabilidad I 82
Dado 83

II

22 de marzo de 1930 (con Schlick) 85
[[La verificación y el dato inmediato]] 85
[[*Verificación y tiempo*]] 85
Probabilidad II 86
Hipótesis I 87
Doble significado de la geometría 88
Varia sobre hipótesis 88

III

19 de junio de 1930 (con Schlick) 90
[[Lo que se tenía que haber dicho en Königsberg]] 90
Formalismo 91
Ecuación y tautología I 93

25 de septiembre de 1930 94
[[Varia]] 94
La variable 96
La demostración 96
Números reales II 96
Idealización 100
Interpretación 100

IV

Miércoles, 17 de diciembre de 1930 (Neuwaldegg) 102
Sobre la ética de Schlick 102

El valor 102
La religión 104
Deber 105
Incontradictoriedad II 105

Viernes, 26 de diciembre de 1930 (con Schlick) 107
El estilo del pensamiento 107

Domingo, 28 de diciembre de 1930 (con Schlick) 107
Incontradictoriedad III 107
El descubrimiento de Sheffer 108
[[*Las reglas del juego y las configuraciones de éste*]] 109
¿Qué es emplear un cálculo? 111
[[*Independencia I*]] 114

Martes, 30 de diciembre de 1930 (con Schlick) 115
[[Incontradictoriedad IV]] 115
[[*Frege y Wittgenstein I*]] 115
Demostración de Hilbert 121

Jueves, 1 de enero de 1931 (con Schlick) 125
América. La esencia del college 125
[[Incontradictoriedad V]] 126
Independencia II 128
Resumen 130
Axiomas I, 1 y I, 2 de Hilbert 131
[[*Cáculo y prosa*]] 132
Frege y Wittgenstein II 132

Domingo, 4 de enero de 1931 (con Schlick) 135
[[Ecuación y regla de sustitución I]] 135
[[*Ecuación y tautología II*]] 140
[[*Verificación de las proposiciones de la física*]] 140
Hipótesis II 141
La geometría como sintaxis III 143
Suplementos 144
Ajedrez 144
Referente a Königsberg 145
Definición de número 145

V

Lunes, 21 de septiembre de 1931 (Argentinierstrasse, entonces [[en esa]] calle) 147
Intención, indicar, significar 147
[[Cálculo y empleo]] 150

[[Consultar el calendario]] 151
Construcción de una caldera de vapor 151
Demotsración de la existencia 152
[[Incontradictoriedad VI]] 153
La contradicción solapada 153
Contradicción 155
Ecuación y regla de sustitución II 157
Demostración indirecta I 158

Miércoles, 9 de diciembre de 1931 (Neuwaldegg) 160
Sobre el dogmatismo 160
Sobre lo infinito 164
Sobre la definición que da Ramsey de la identidad 166
Incontradictoriedad VII 169

Añadidura al dictado 173
Incontradictoriedad VIII 173
Símil: La "extensión" de π 177
[[*El concepto de cálculo*]] 178
[[*La demostración en geometría y en aritmética*]] 178
Bipartición del ángulo 179
La generalidad en geometría 181
Demostración indirecta II 182

VII

1 de julio de 1932 (Argentinierstrasse) 184
Hipótesis III 185

Apéndice A

Totalidad y sistema 187
Ecuación y tautología 191
Concepto y forma 193
¿Qué es un número? 194
Sentido y significado 199
Sobre lo infinito 200
Definición de Dedekind 203

Apéndice B

Tesis de Friedrich Waismann (hacia 1930) 205
1. Hecho atómico, hecho, realidad 205
2. Lenguaje 206

3. Sintaxis 210
4. Simetría, asimetría 212
5. Identidad 213
6. Comprobación 214
7. Definición 216
8. Objeto 223
9. El espacio lógico 228

ÍNDICE ANALÍTICO 231

LUDWIG WITTGENSTEIN Y EL CIRCULO DE VIENA

FRIEDRICH WAISMANN

Ludwig Wittgenstein (1889-1951) se encontró con Morits Schlick —fundador del neopositivismo— en 1926, o en 1927, y por ese contacto llegó la influencia de aquél sobre el Círculo de Viena. Friedrich Waismann estuvo presente en muchas de las charlas que sostuvieron los dos, y al principio de los años treintas se convirtió en el auténtico portavoz de Wittgenstein en Viena. Una vez que éste regresó a Cambridge, en 1929, continuó yendo a Viena durante las vacaciones, y allí sostuvo conversaciones con Schlick y Waismann para explicar puntos de vista similares a los expuestos en su **Philosophische Bemerkungen,** comentar y defender algunas de las doctrinas del **Tractatus logico-philosophicus,** criticar y retractarse de otras, o bien, rebatir las críticas y objeciones de sus dos adversarios o dar satisfacción a sus preguntas.

Estas conversaciones, tomadas taquigráficamente por Waismann, son las que aparecen en el presente libro. Se han añadido dos apéndices, entresacados de los escritos de Waismann: uno es un conjunto de anotaciones sobre asuntos matemáticos que él elaboró, basado en el pensamiento de Wittgenstein, y el otro lo forman sus **Thesen** ("Tesis"), que son un intento de codificar la filosofía de Wittgenstein. Ambos circularon entre los miembros del Círculo de Viena hacia 1930.

280
gandhi
$ 25200

PORTADA: SIGNUM, S.A.

LUDWIG WITTGENSTEIN Y EL CIRCULO DE VIENA Friedrich Waismann